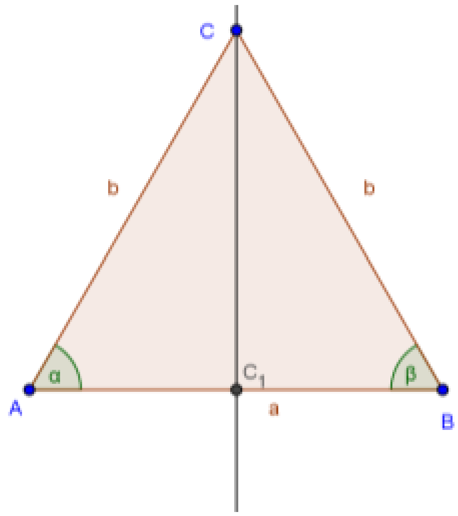
Со методот на напредување (синтетички метод) да се докажат теоремите:

Теорема: Во рамнокрак триаголник, аглите при основата се еднакви.(категорична форма)



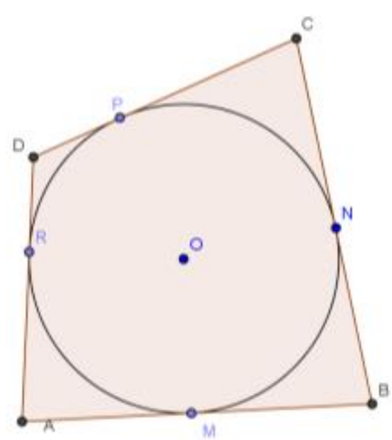
Доказ:

Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак. Тогаш CC_1 е висина, тежишна линија и симетрала на $\triangle ABC$

$\measuredangle ACC_1 \cong \triangle BCC_1$ по признакот САС

$(\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{CC_1}$ – заедничка страна и $\measuredangle ACC_1 = \measuredangle BCC_1) \Rightarrow (\measuredangle A = \alpha, \measuredangle B = \beta) \Rightarrow \alpha = \beta$

Теорема: Ако четириаголникот е тангентен, тогаш збировите од спротивните стани се еднакви. (условна форма)

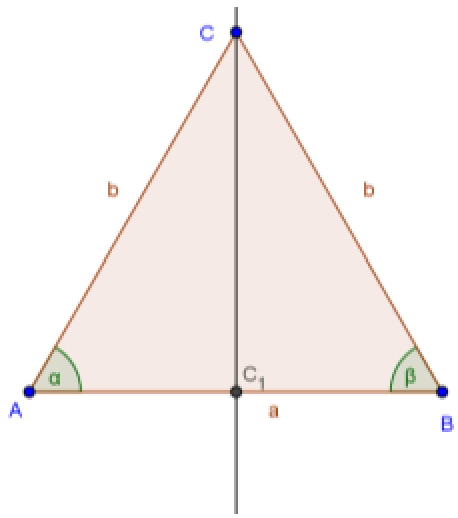


Доказ: Нека четириаголникот ABCD е тангентен и нека M, N, P, Q се допирните точки на страните (тангентите) AB, BC, CD и DA соодветно.
Тогаш $\overline{AM}=\overline{AQ}$, $\overline{BM}=\overline{BN}$, $\overline{CN}=\overline{CP}$, $\overline{DP}=\overline{DQ}$ како тангентни отсечки.

$\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{AM}+\overline{MB}+\overline{CP}+\overline{PD} = (\overline{AQ}+\overline{BN})+(\overline{CN}+\overline{DQ}) =$
$(\overline{AQ}+\overline{DQ})+(\overline{BN}+\overline{CN}) = (\overline{AQ}+\overline{QD})+(\overline{BN}+\overline{CN}) =$
$\overline{AD}+\overline{BC}$ што требеше да се докаже.

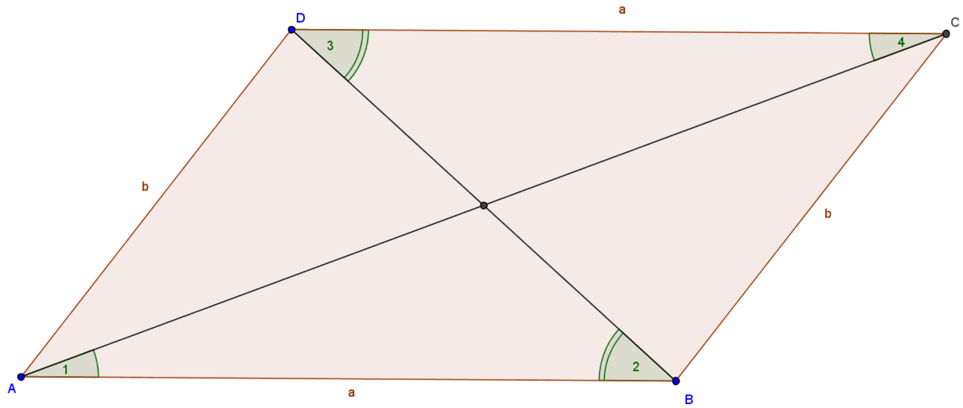
Со методот на враќање (аналитички метод) да се докажат теоремите:

Теорема: Во рамнокрак триаголник, аглите при основата се еднакви.(категорична форма)



Доказ: Нека $\measuredangle A=\measuredangle B$ т.е. $\alpha=\beta$.
Доволен услов за да важи $\alpha=\beta$ е $\Delta ACC_1 \cong \Delta BCC_1$.
Од $\Delta ACC_1 \cong \Delta BCC_1 \Rightarrow$ дека соодветните страни им се еднакви т.е. $\overline{AC}=\overline{BC}$ од каде се заклучува дека ΔABC е рамнокрак.

Теорема: Ако четириаголникот е паралелограм тогаш, дијагоналите се преполовуваат во пресечната точка.(условна форма)



Доказ: Нека дијагоналите во четириаголникот ABCD се преполовуваат.

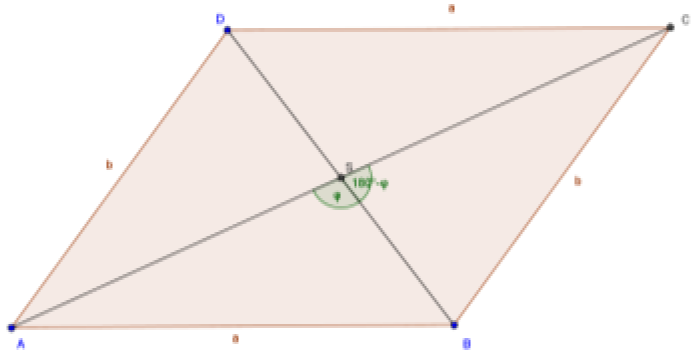
т.е. $\overline{AS}=\overline{SC}$ и $\overline{BS}=\overline{SD}$. Доволен услов за да важи претходното е $\triangle ABS \cong \triangle CDS$. Оттука следува дека $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $\measuredangle 2=\measuredangle 3$ и $\measuredangle 1=\measuredangle 4$.

Аглите $\measuredangle 2$ и $\measuredangle 3$ и $\measuredangle 1, \measuredangle 4$ се агли на трансфезала (наизменични). Бидејќи тие се еднакви следува дека правите AB и CD се паралелни.

Од тука следува дека ABCD има еден пар паралелни и еднакви страни што значи дека е паралелограм што требаше да се докаже.

Со користење на индиректен метод (правилото на контрапозиција) да се докажат теоремите:

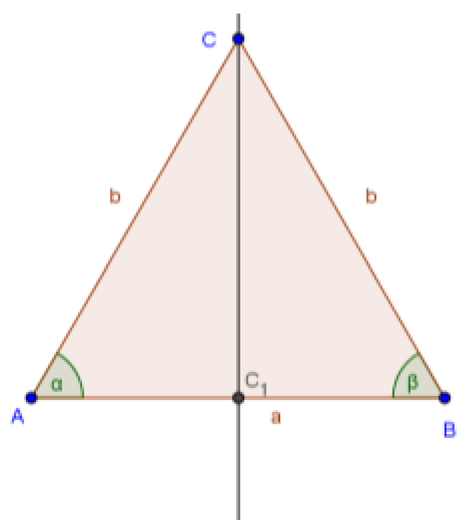
Теорема: Ако паралелограмот е ромб, тогаш дијагоналите се заемно нормални. (условна форма)



Доказ. Нека дијагоналите не се сечат под прав агол (не се заемно нормални) т.е. $\varphi \neq 90^\circ$. Тогаш $\triangle ABS \not\cong \triangle BCS$ од каде што следува дека $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ што значи четириаголникот не може да биде ромб.

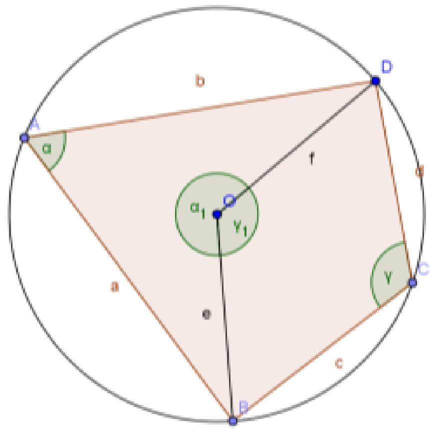
Теорема: Во рамнокрак триаголник, аглите при основата се еднакви.(категорична форма)

Доказ: Нека триаголникот не е рамнокрак. Тогаш $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ не се складни т.е. $\triangle ACC_1 \not\cong \triangle BCC_1 \Rightarrow$ аглите не се складни односно $\alpha \neq \beta$ како агли на основата.



Доказ на уште неколку теореми:

Теорема: Ако четириаголникот е тетивен, тогаш спротивните агли се суплементни.



Доказ: Нека четириаголникот ABCD е тетивен. Нека α и γ се спротивни агли на четириаголникот (тие се периферни). Нека $\measuredangle 1$ и $\measuredangle 2$ се соодветните централни агли над ист кружен лак. Тогаш важи

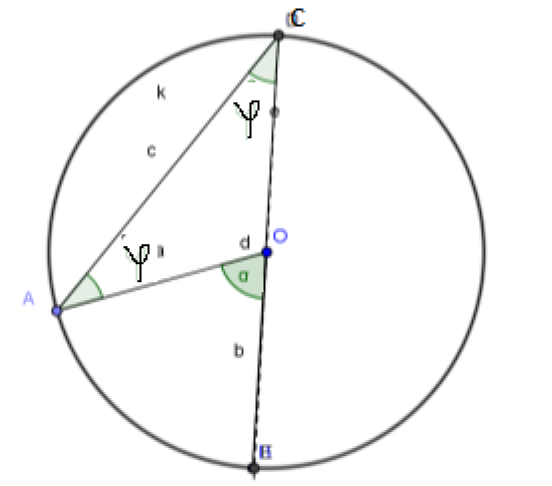
$$\alpha = \frac{\measuredangle 1}{2} \quad и \quad \gamma = \frac{\measuredangle 2}{2}.$$

$$\alpha + \gamma = \frac{\measuredangle 1}{2} + \frac{\measuredangle 2}{2} = \frac{\measuredangle 1 + \measuredangle 2}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$\alpha + \gamma = 180^\circ$ (се суплементни)

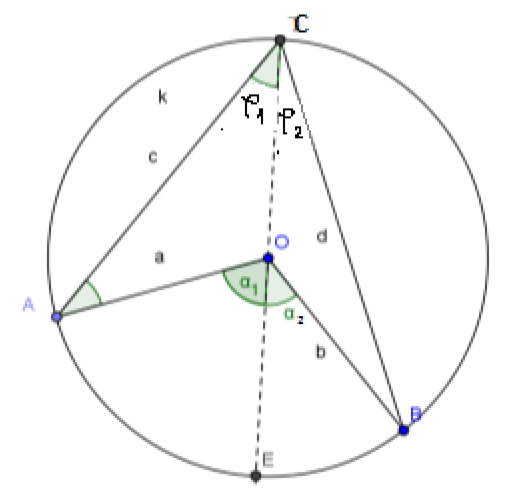
Теорема: Централниот агол е двапати поголем од соодветниот периферен агол над ист кружен лак.

а)



Доказ: а) Нека центарот О лежи на кракот на периферниот агол β. Тогаш ΔAOB е рамнокрак триаголник и затоа $\measuredangle A = \measuredangle B = \varphi$. За аголот α како надворешен агол за ΔABO важи $\alpha = 2\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\alpha}{2}}$

б)

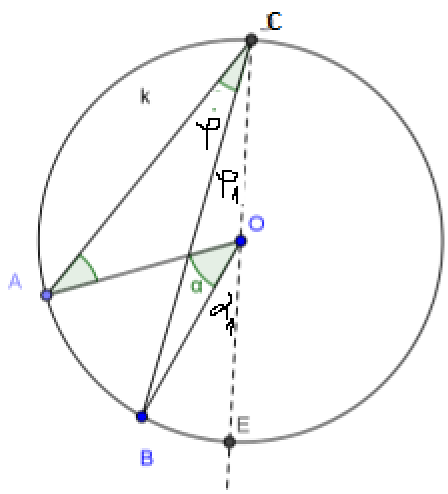


б) Нека О припаѓа во внатрешноста на периферниот агол φ. Низ А и О ќе повлечеме права и со тоа се добиваат два периферни агли φ_1 и φ_2 и се разгледува случајот под а).

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi, \quad \varphi_1=\frac{\alpha_1}{2}, \quad \varphi_2=\frac{\alpha_2}{2}, \quad \alpha_1+\alpha_2=\alpha$$

$$\boxed{\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{\alpha}{2}}$$

В)



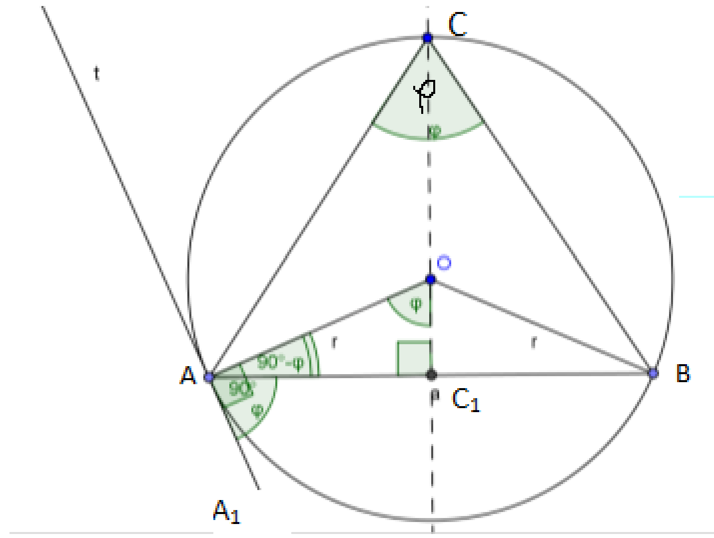
в) Нека О не припаѓа во внатрешноста на аголот φ, тогаш со повлекување на права низ А и О се добива пак случајот под а) $\varphi'=\varphi+\varphi_1$; $\alpha'=\alpha+\alpha_1$

$$\varphi'=\frac{\alpha'}{2}, \quad \boxed{\varphi_1=\frac{\alpha_1}{2}} \Rightarrow (\text{од а}) \text{ тогаш}$$

$$\varphi'=\varphi+\varphi_1=\frac{\alpha}{2}\ ; \quad \frac{\alpha_1+\alpha}{2}=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha}{2}=\varphi_1+\varphi \Rightarrow$$

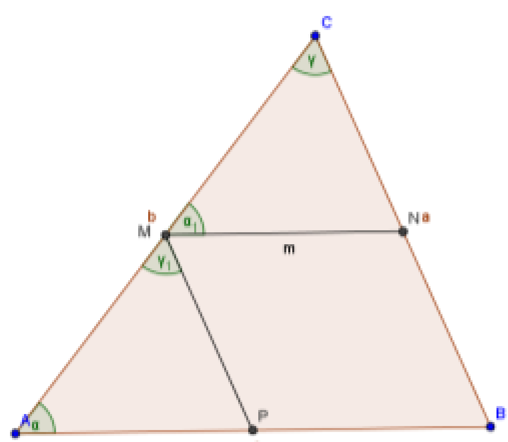
$\boxed{\frac{\alpha}{2}=\varphi}$ што требаше да се докаже.

Теорема: Аголот помеѓу тетивата на кружница и тангентата повлечена во една од крајните точки од тетивата е еднаков со периферниот агол што одговара над таа тетива.



Доказ: Нека $\measuredangle ACB = \varphi \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\varphi$ како централен агол над истата тетива (AB).
ΔABO е рамнокрак $\Rightarrow \measuredangle AOC_1 = \varphi$ оттука
ΔAOC_1 е правоаголен триаголник и $\measuredangle OAC_1 = 90° - \varphi$.
Тангентата t во допирната точка гради прав агол со радиусот на кружницата, па затоа $\measuredangle OAA_1 = 90°$.
Тогаш $\measuredangle BAA_1 = 90° - \measuredangle OAC_1 = 90° - (90° - \varphi) = \varphi$
што требаше да се докаже.

Теорема: Средната линија во триаголник е еднаква на половин од страната со која нема заеднички точки и е паралелна со неа.



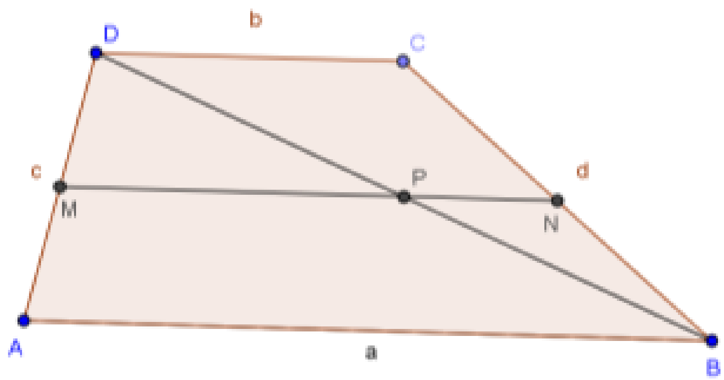
Доказ: Нека M, N и P се средини на страните AC, BC и AB на триаголникот ABC соодветно. Тогаш $\measuredangle\alpha = \alpha_1$, $\gamma_1 = \gamma$ и $\overline{AM} = \overline{MC}$

ΔAMP

ΔMNC

Следува дека $\Delta AMP \cong \Delta MNC$ од каде $MN \parallel AP$ т.е. $MN \parallel AB$ и $\overline{MN} = \overline{AP}$ односно $\overline{AB} = 2AP$ т.е. $\overline{AB} = 2MN \Rightarrow \boxed{\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}}$ што требаше да се докаже.

Теорема: Во трапез средната линија е еднаква на полузбирот од основите и е паралелна со основите. (категорична форма)



Доказ: Нека е даден трапезот ABCD и нека M и N се средини на краците AD и BC соодветно. Ќе ја повлечеме дијагоналата BD која трапезот го дели на два триаголници ΔABD и ΔBCD. Нека P е пресечна точка на MN со дијагоналата BD.

Тогаш MP е средна линија за ΔABD и важи

$\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$ и $\overline{MP} \parallel AB$

Слично PN е средна линија на ΔBCD и важи.

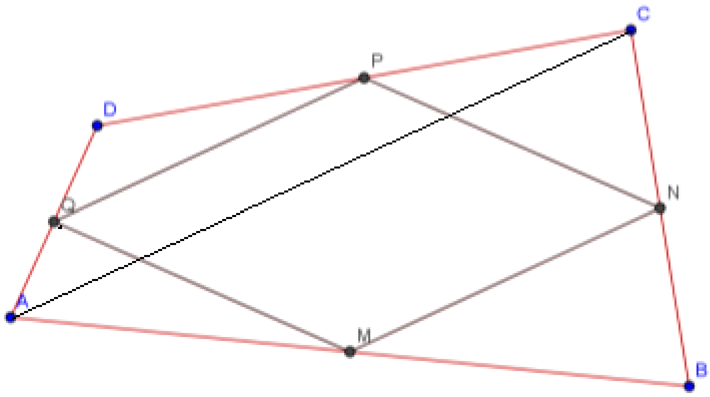
$\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}b$ и $PN \parallel CD$. Тогаш

$\overline{MP} + \overline{PN} = \overline{MN}$

$\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$

$\boxed{\overline{MN} = \frac{a+b}{2}}.$

Теорема: Средините на страните на кој било четириаголник се темиња на паралелограм. (категорична форма)



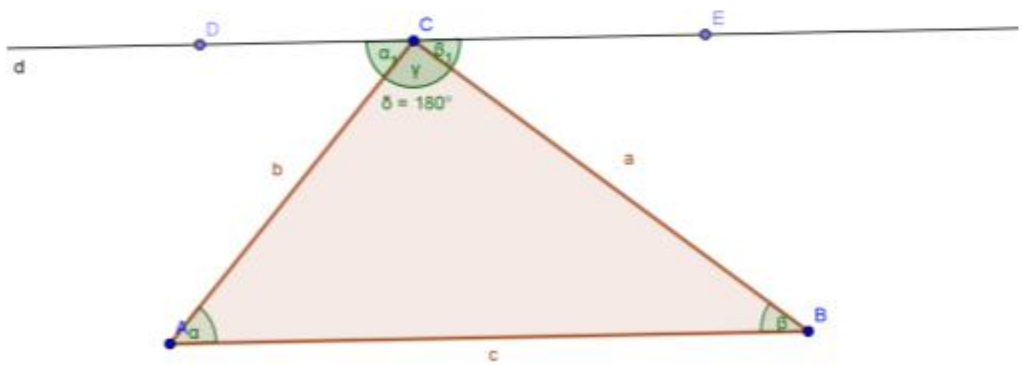
Доказ: Нека е даден четириаголникот ABCD. И нека M, N, P, Q се средини на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Од цртежот ќе ги разгледаме ΔABC и ΔACD.

MN е средна линија на ΔABC и затоа $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $MN \parallel AC$ (1)

и PQ е средна линија на ΔACD и затоа $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $PQ \parallel AC$ (2). Од (1) и (2): $\Rightarrow$ $\overline{MN} = \overline{PQ}$ и $MN \parallel PQ$

Ако еден четириаголник има еден пар паралелни и еднакви страни тогаш тој е паралелограм т.е. MNPQ е паралелограм што требаше да се докаже.

Теорема: Збирот на внатрешните агли во триаголник изнесува 180^{o}. (категорична форма)

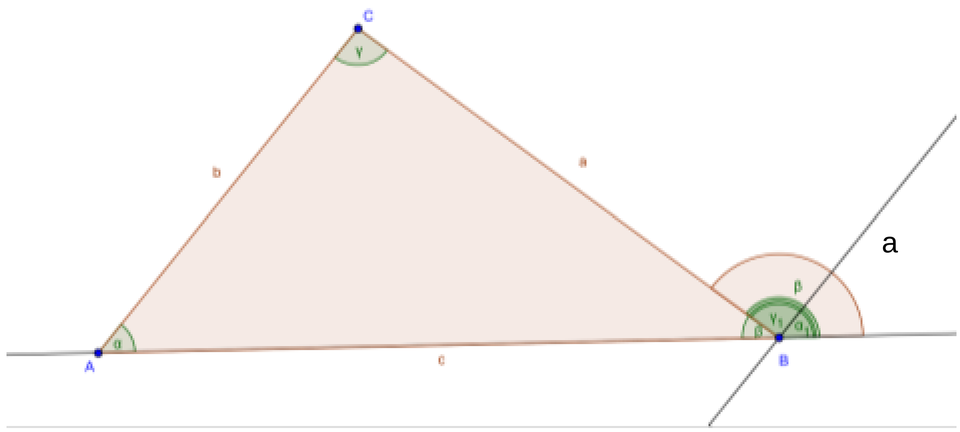


Доказ: Нека $a \parallel AB$ и минува низ C.

$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha \\ \beta_1 = \beta \end{array}\right\}$ како наизменични агли тогаш $\alpha_1 + \gamma + \beta_1 = 180^\circ$

односно $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$ т.е. $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$ што требаше да се докаже.

Теорема: Секој надворешен агол кај триаголник е еднаков на збирот од внатрешните несоседни агли. (категорична форма)



Доказ: Низ B ќе повлечеме права паралелна со AC. Тогаш $\alpha_1 = \alpha$ - (како агли со паралелни краци)

и $\gamma_1 = \gamma$ - како наизменични агли

Надворешниот агол $\beta_1 = \alpha_1 + \gamma_1$ односно $\boxed{\beta_1 = \alpha + \beta}$

што требаше да се докаже.

Теорема: За аритметичката и геометриската прогресија за два броја важи следнава реалација:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Доказ: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \;/\; +4ab$

$$a^2 - 2ab + 4ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + 4ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a+b \geq \sqrt{4ab}$$

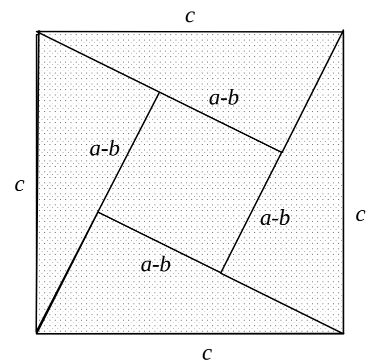
$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

Докази на Питагоровата теорема

Точно не се знае како Питагора ја докажал теоремата но постојат податоци дека 500 пред него учени во Кина имале некаков доказ. Поради големото значење на тео Питагоровата теорема се извршени многу доказалства (пронајдени се преку 350). Отогаш низ вековите многу математичари се занимавале со доказот на теоремата и спорет едно математичко списание, како сто споменавме пронајдени се преку 350 докази. Ќе дадеме некои од нив:

1.Доказот на Питагоревата теорема од Индискиот математичар Бхаскара(1114)

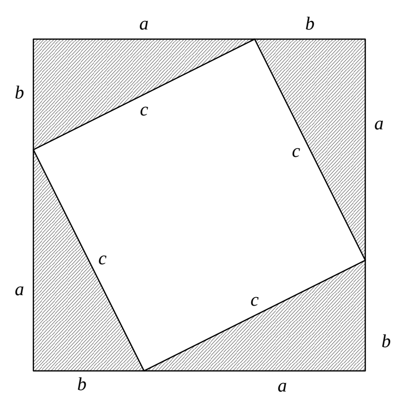


Црт.1

На црт.1 е нацртан правоаголен триаголник **ABC**, потоа квадратот со страна **c.** Плоштината на квадратит е $\mathbf{c^2}$. Тој е составен од 4 правоаголни триаголници со катети ***a*** и ***b*** и еден квадрат со страна ***a-b***. Според тоа:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

2.

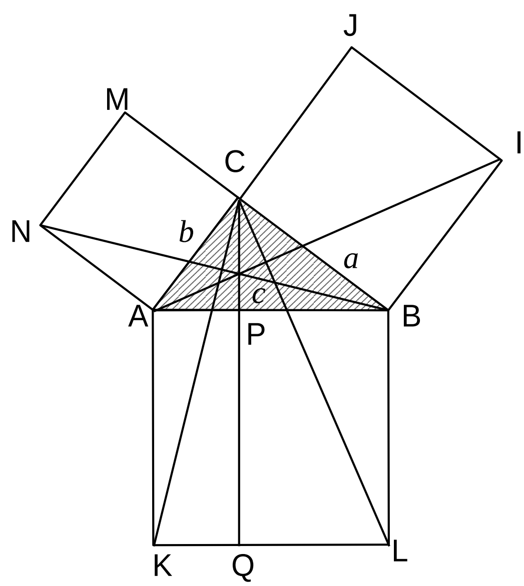


Црт.2

На црт.2 нацртан е прво произволен правоаголен триаголник со катети ***a*** и ***b*** и хипотенузата ***c***, а потоа е нацртан квадратот со страна ***a+b***. Според овој цртеж утврдено е дека плоштината на квадратот со страна a+b е еднаква на збирот од плоштините на четирите правоаголни триаголници , плус плоштината на квадратот со страна c, t.e $(a+b)^2 = 4\cdot\frac{ab}{2}+c^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2 \Rightarrow a^2+b^2=c^2$. Според тоа се заклучува дека е докажана теоремата. .

3.Следниов доказ се мисли дека е од Питагора

На страните на произволен правоаголен триаголник **ABC (**црт.3) се конструирани квадратите **CBIJ, ACMN** и **ABKL.** За да ја докажеме Питагоровата теорема треба да се докаже $P_{CBIL}+P_{ACMN}=P_{ABKL}$



Црт.3

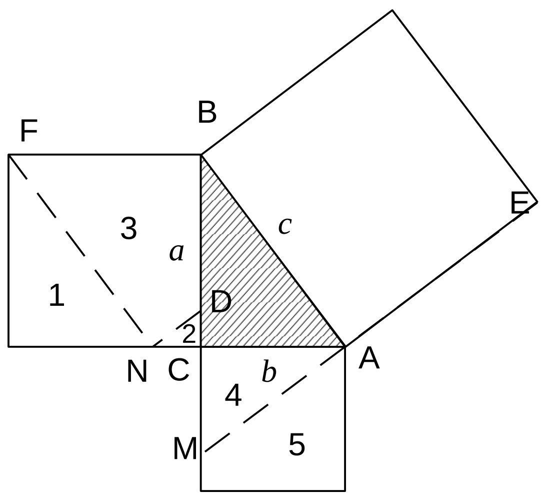
Доказ: За таа цел цртаме $CQ \perp AB$**.** Потоа докажуваме дека $P_{ACMN}=P_{APKQ}$. За таа цел ги цртаме отсечките CK и BN.

$P_{ABN}=\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NM}}{2}=\frac{b^2}{2}\Rightarrow P_{ABMN}=2P_{ABN}$. $\Delta ABN \cong \Delta ACK$ според признакот САС. $P_{ACK}=\frac{\overline{AK}\cdot\overline{AP}}{2}=\frac{P_{APKQ}}{2}\Rightarrow P_{APKQ}=2P_{ACK}$. Од складноста на триаголниците следува дека $P_{ABMN}=P_{APKQ}$.Слично, $P_{ABI}=\frac{\overline{BI}\cdot\overline{IJ}}{2}=\frac{a^2}{2}\Rightarrow P_{BIJC}=2P_{ABI}$. $\Delta ABI \cong \Delta BCL$ според признакот САС.

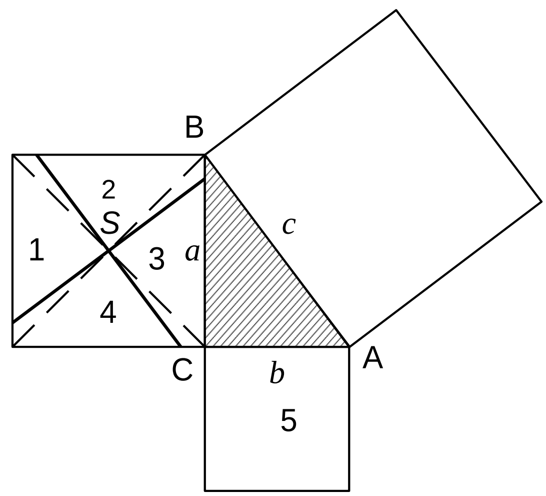
$P_{BCL} = \dfrac{\overline{BL} \cdot \overline{BP}}{2} = \dfrac{P_{BPLQ}}{2} \Rightarrow P_{BPLQ} = 2P_{BCL}$. Од складноста на триаголниците следува дека $P_{BCIJ} = P_{BPLQ}$

Од претходното следува дека $P_{BPLQ} + P_{APLK} = 2P_{ACK} + 2P_{ABI} = P_{ABMN} + P_{BCIJ}$, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$ со што е докажана Питагоровата теорема.

4.



Црт.4



Црт.5

Наредниов доказ се изведува со дадените цртежи (црт.4 и црт.5) и со режање, при што утврдуваме дека збирот од плоштините над квадратите над катетите е еднаков на плоштината на квадратот над хипотенузата.

На црт.4 ($FN \parallel AB, ND \perp AB$, а AM е продолжение на страната AE).

На нацртаниот произволен правоаголен триаголник (црт.5) му се конструирани квадратите над неговите страни. Определен е и пресекот S на дијагоналите на квадратот над една од катетите, низ таа точка повлекуваме права што ќе биде парарелна со хипотенузата и права што ќе биде нормална на хипотенузата. Така ги добиваме деловите 1, 2, 3, 4. Од кои и од квадратот со страната **b** може да составиме квадрат со страна **c**.