1 ПОИМ ЗА ИСКАЗ. НЕГАЦИЈА

Треба да знаеш:

- Исказ е декларативна реченица која има смисла и која е или вистинита или невистинита.
- Логичките константи се $\top$ (те), точно или $\bot$ (не те), неточно.
- Вистинитосната вредност на исказот p се означува со $\tau(p)$. Можно е или $\tau(p)=\top$ или $\tau(p)=\bot$.
- Негацијата на исказот p е не p, а се означува $\rceil p$, а таблица на вистинитоста е:

p	$\rceil p.$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

1. Одреди кои од речениците се искази:

а) $1+1=2.$ б) Мислам дека $2+5=7.$

в) Дали е $3-8=11$? г) $2^3=3^2.$

д) Надвор времето е убаво.

2. Објасни зошто не се искази речениците:

а) $2+x=5$; б) Бројот 13 е несреќен број.

3. Кои од следните искази се вистинити:

а) $\frac{3}{4}=0,75$; б) $x+3=7$ за $x=2$;

в) $20+5\cdot 4=100$; г) Бројот 13 е прост број?

4. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\tau(2+5=7)$; б) $\tau(3|11)$;

в) $\tau(\text{Бројот 1 е сложен број})$; г) $\tau(x+3=2x+2 \text{ за } x=1)$.

5. Запиши ги негациите на следните искази:

а) Бројот 8 е потполн квадрат на некој природен број;
б) Правоаголниот триаголник има два прави агли;
в) Бројот 9 е парен број;
г) Бројот 17 е делив со 4.

6. Изврши негација на следните искази, а потоа одреди ја логичката вредност на добиените искази:

а) $3>2$; б) $5\geq 10$; в) $1<0$; г) $1\leq 3$.

7. Запиши ги негациите на исказите:

а) За секој број x, важи $x^2>0$;

б) Постои некој број y, за којшто $y^2-4=0$.

8. Запиши ги негациите на следните искази, а потоа одреди ја вистинитосната вредност на запишаните искази:

а) Постои некој реален број x, таков што $x^2+1=0$;

б) Секој четириаголник е трапез.

2 КОНЈУНКЦИЈА. ДИСЈУНКЦИЈА

Треба да знаеш:

- Конјункцијата на исказите p и q е вистинита, ако и само ако се вистинити двата искази p и q, а таблица на вистинитоста е:

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

- Дисјункцијата на исказите p и q е невистинита, ако и само ако се невистинити двата искази p и q, а таблица на вистинитоста е:

$\vee$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$

9. Дадени се исказите p: 1 е прост број, q: 1 е непарен број и r: $1<2$. Формирај ги конјункциите: а) $p\wedge q$; б) $p\wedge r$; в) $q\wedge r$, а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност.

10. Одреди ја вистинитосната вредност на конјункцијата:

а) $(2>7)\wedge(5<8)$; б) $(5-4=1)\wedge(-4<-1)$;

в) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\right)\wedge\left(3^2>2^3\right)$.

г) Реката Вардар минува низ Велес и низ Скопје.

11. Дадени се исказите $p: 2\geq 2$ и $q: 3|7$. Формирај ги исказите:

а) $p\wedge p$; б) $p\wedge q$; в) $q\wedge p$ и г) $q\wedge q$, а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност.

12. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\rceil p \wedge q$, б) $p \wedge \rceil q$, в) $p \wedge q$ и г) $\rceil p \wedge \rceil q$, ако $p: 3 \geq 5$ и $q: 3^2 - 2^3 = 1$.

13. Дадени се исказите: $p: 2|10$, $q: x+1=3$ за $x=2$ и r: бројот 5 е прост број. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $(p \wedge q) \wedge r$, б) $p \wedge (q \wedge r)$, в) $(\rceil p \wedge \rceil q) \wedge \rceil r$ и г) $\rceil p \wedge (\rceil q \wedge \rceil r)$.

14. Од исказите $p: 4 > 2$, $q: 3|3$ и $r: 2+3=4$, состави ја дисјункцијата

а) $p \vee q$; б) $p \vee r$; в) $q \vee r$.

Одреди ја вистинитосната вредност на секој од добиените искази.

15. Одреди ја вистинитосната вредност на дисјункциите:

а) $(3>5) \vee (2 \geq 3)$; б) $(2-3=1) \vee (-4>-5)$; в) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 1\right) \vee (3^3 = 9)$;

г) Реката Вардар минува низ Скопје или низ Прилеп.

16. Дадени се исказите p: 3 е прост број и q: 3 е парен број. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\rceil p \vee q$; б) $p \vee \rceil q$; в) $p \vee q$; г) $\rceil p \vee \rceil q$.

17. Дадени се исказите $p: 3|9$, $q: x+4=7$ за $x=2$ и r: 7 е прост број. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $p \vee (q \vee r)$; б) $(p \vee q) \vee r$; в) $\rceil p \vee (\rceil q \vee \rceil r)$; г) $(\rceil p \vee \rceil q) \vee \rceil r$.

18. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $(2 \geq 2 \wedge 3 \mid 7) \vee (2^3 = 8)$; б) $(2^5 = 10 \vee 5 \mid 10) \wedge (5 > 5)$.

3 ИМПЛИКАЦИЈА. ЕКВИВАЛЕНЦИЈА

Треба да знаеш:

Импликацијата, $p \Rightarrow q$, од исказите p и q е исказ кој е невистинит ако и само ако првиот исказ p е вистинит, а вториот исказ q е невистинит, а таблицата на вистинитоста е:

$\Rightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

Еквиваленцијата, $p \Leftrightarrow q$, на исказите p и q е исказ кој е вистинит ако и само ако исказите p и q имаат иста вистинитосна вредност, а таблицата на вистинитоста е:

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

19. Од исказите $p: 2$ е парен број, $q: 3>4$ и $r: 4$ е прост број, формирај ја импликацијата: а) $p \Rightarrow q$; б) $p \Rightarrow r$; в) $q \Rightarrow r$, а потоа одреди ја нејзината вистинитосна вредност.

20. Одреди ја вистинитосната вредност на импликацијата:

а) $(3>5) \Rightarrow (2<4)$; б) $(5-3=2) \Rightarrow (-3<-7)$;

в) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\right) \Rightarrow \left(3^3<2^4\right)$.

21. Дадени се исказите $p: 3 \leq 5$ и $q: 3 \mid 7$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\rceil p \Rightarrow q$; б) $p \Rightarrow \rceil q$; в) $p \Rightarrow q$; г) $\rceil p \Rightarrow \rceil q$.

22. Дадени се исказите: $p: 3 \mid 10$, $q: x+3=5$ за $x=2$ и r: 5 е прост број. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $p \Rightarrow q$; б) $q \Rightarrow p$; в) $(\rceil p \Rightarrow \rceil q) \Rightarrow \rceil r$; г) $\rceil p \Rightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil r)$.

23. Од исказите $p: 3 \mid 6$, $q: 6 \mid 3$ и $r: 3 \mid 3$ формирај ја еквиваленцијата:

а) $p \Leftrightarrow q$; б) $p \Leftrightarrow r$; в) $q \Leftrightarrow r$, а потоа одреди ја нејзината вистинитосна вредност.

24. Одреди ја вистинитосната вредност на исказот:

а) $\rceil(4 \leq 2) \Leftrightarrow \rceil(4-1=-3)$; б) $(2 \mid 8) \Leftrightarrow (2 \mid 11)$;

в) $\left(\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{4}{12}\right) \Leftrightarrow \left(3^4=12\right)$.

25. Одреди ја вистинитосната вредност на исказот: а) $\rceil p \Leftrightarrow \rceil q$;

б) $\rceil p \Leftrightarrow q$; в) $p \Leftrightarrow \rceil q$; г) $p \Leftrightarrow q$, ако $p: 4 \geq 7$ и $q: 3 \mid 12$.

26. Дадени се исказите: $p: 2>3$, $q: 5 \neq 7$ и $r: 2 \mid 7$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказот:

а) $p \Leftrightarrow q$; б) $q \Leftrightarrow p$; в) $(\rceil p \Leftrightarrow \rceil q) \Leftrightarrow \rceil r$; г) $\rceil p \Leftrightarrow (\rceil q \Leftrightarrow \rceil r)$.

4 ИСКАЗНИ ФОРМУЛИ

Треба да знаеш:

- Исказните променливи p, q, r,... симболите $\top$ и $\bot$ сврзани на дозволен начин со логичките операции $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ формираат сложени искази кои се викаат исказни формули.
- Исказните формули што се вистинити за сите вредности на исказните променливи се викаат тавтологии.

Состави вистинитосна таблица за секоја од следните исказни формули и одреди која од нив е тавтологија.

27. а) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$; б) $(p \wedge \urcorner p) \Rightarrow p$.

28. а) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$; б) $(p \Rightarrow p) \Leftrightarrow \urcorner p$.

Со помош на вистинитосна таблица утврди која од следните формули е тавтологија:

29. а) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\urcorner p \vee q)$; б) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\urcorner q \Rightarrow \urcorner p)$.

30. а) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$; б) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

Докажи дека исказните формули дадени во задачите од 31 до 34 се тавтологии:

31. а) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$; б) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

32. а) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; б) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

33. а) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$; б) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$.

34. а) $p \Rightarrow (q \vee p)$; б) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

35. Со примена на Де Моргановите закони докажи дека се тавтологии формулите:

а) $\urcorner(\urcorner p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \urcorner q)$; б) $\urcorner(\urcorner p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \urcorner q)$.

36. Докажи дека следните формули се логички еквивалентни:

а) $p \Rightarrow q$ и $\urcorner p \vee q$; б) $p \Leftrightarrow q$ и $(\urcorner p \vee q) \wedge (p \vee \urcorner q)$.

37. а) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ и $p \Leftrightarrow q$; б) $\urcorner(p \Rightarrow q)$ и $p \wedge \urcorner q$.

38. а) $\urcorner(p \Leftrightarrow q)$ и $\urcorner p \Leftrightarrow q$; б) $p \vee (q \wedge r)$ и $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

5 АКСИОМИ И ТЕОРЕМИ

Треба да знаеш:

- Математичките тврдења што се прифатени за точни без доказ се викаат аксиоми.
- Математичките тврдења чија точност се докажува се викаат теореми.

39. Одреди ја вистинитосната вредност на тврдењето:

а) За секои $a,b\in\mathbb{N}$, $a\cdot b=b\cdot a$.

б) Низ три точки минува една и само една рамнина.

в) За кои било $a,b\in\mathbb{R}$, или $a>b$ или $a=b$ или $a<b$.

40. Кои од следниве тврдења се аксиоми:

а) Низ две точки во рамнината минува една и само една права.

б) Ако $2|x$ и $7|x$, тогаш $14|x$, за $x\in\mathbb{N}$.

в) $a+(-a)=0$, за секое $a\in\mathbb{Z}$.

41. Дали тврдењето: "Ако $a+c=b+c$, тогаш $a=b$ за секои $a,b,c\in\mathbb{Z}$" е основно или изведено тврдење? Ако е изведено, тогаш одреди кое основно тврдење е користено.

42. Кои од следните тврдења се аксиоми, а кои теореми:

а) Низ дадена точка што не лежи на дадена права минува една и само една права што е паралелна со дадената.

б) $x^2-2x+2>0$ за секое $x\in\mathbb{R}$;

в) Центарот на опишаната кружница на правоаголен триаголник е во средината на хипотенузата.

43. Дадена е теоремата: "Ако многуаголникот е четириаголник, тогаш збирот на внатрешните агли е 360^0". Дадената теорема искажи ја во категорична форма.

44. Напиши ја во условна форма теоремата: "Тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка".

45. Напиши ја обратната теорема на теоремата: "Ако две различни прави отсекуваат пропорционални отсечки на краците на еден агол, тогаш тие две прави се паралелни".

46. Дадена е теоремата: "Ако $x|a \wedge x|b \wedge x|c \wedge a+b>c$, тогаш $x|a+b-c$ за секои $a,b,c,x\in\mathbb{N}$". Искажи го обратно тврдење на дадената теорема и утврди дали тоа тврдење е теорема.

6 ДОКАЗИ НА ТЕОРЕМИ

Треба да знаеш:

- Директен, синтетички, доказ на теорема е доказ со напредување.
- Директен, аналитички, доказ на теорема е доказ со враќање назад.
- За индиректен метод на докажување на теоремите се користи правилото на контрапозиција $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\urcorner q \Rightarrow \urcorner p)$ или правилото на контрадикција: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \urcorner q \Rightarrow \urcorner p)$;

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \urcorner q \Rightarrow r \wedge \urcorner r).$$

Примени синтетички доказ при докажувањето на теоремите:

47. Ако $2|\,x \wedge 7|\,x$, тогаш $14|\,x$.

48. Ако $2|\,x \wedge 5|\,x \wedge 7|\,x$, тогаш $70|\,x$.

49. Висините кон краците на рамнокракиот триаголник се еднакви.

Докажи ги со аналитички доказ теоремите:

50. За секое $x \in \mathbb{R}, \dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$.

51. Збирот на внатрешните агли на триаголникот е 180^0.

Со правило на контрапозиција докажи ги теоремите:

52. Симетралите на два соседни агли на паралелограмот се сечат под прав агол.

53. $\dfrac{x^4}{1+x^8} \leq \dfrac{1}{2}$ за секое $x \in \mathbb{R}$.

Докажи ги теоремите (54-58):

54. Ако од една точка се повлечени тангенти кон кружницата, тогаш тангентните отсечки се еднакви меѓу себе.

55. Ако $a, b \in \mathbb{R}^+$, тогаш $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, т.е. геометриската средина на броевите a и b е поголема или еднаква од нивната хармониска, а помала или еднаква од нивната аритметичка средина.

56. Во тетивниот четириаголник спротивните агли се суплементни.

57. Средната линија на трапезот е еднаква на полузбирот од основите.

58. Средините на страните на четириаголник се темиња на паралелограм.

7 МНОЖЕСТВО. ПОДМНОЖЕСТВО. ЕДНАКВИ И ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

Треба да знаеш:

- Множеството A е подмножество од множеството B, ако секој елемент од множеството A е елемент на множеството B, се означува $A \subseteq B$.
- Множествата што имаат исти елементи се еднакви.
- Множествата што имаат еднаков број на елементи се еквивалентни множества.

Во задачите од 59 до 62 запиши ги табеларно множествата:

59. а) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x > 2 \wedge x < 5\}$; б) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x | 12\}$.

60. а) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 5 \wedge x \neq 3\}$; б) $\{x | x \in \mathbb{Z} \wedge (x+1) | 9\}$.

61. а) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge 10 | x \wedge x | 40\}$; б) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge 6 | x \wedge x | 54\}$.

62. а) $\{x | x \in \mathbb{Z} \wedge x + 1 = 0\}$; б) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 2 \wedge x \neq 1\}$.

Кои од следните тврдења се витинити (63-65):

63. а) $1 \in \mathbb{N}$; б) $\varnothing = 0$; в) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

64. а) $\varnothing = \{0\}$; б) $\{a\} \in \{a, b, c\}$;

в) $\{x | x \text{ е парен позитивен број}\} = \{y | y = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

65. а) $\{1, \{2\}\} = \{1, 2\}$; б) $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2, 1\}$; в) $\{x | x - 3 = 0\} \supset \{3\}$.

Одреди кои множества се еднакви, кои еквивалентни, а кое множество е подмножество од другото множество (66-68):

66. а) $A = \{2\}$, $B = \{x | x - 2 = 0\}$; б) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x | x \in 2\mathbb{N} \wedge x < 10\}$.

67. а) $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge x | 1\}$; б) $A = \varnothing$, $B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x < 1\}$.

68. а) $A = \varnothing$, $B = \{x | x \in 2n \wedge x \in 2n + 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$;

б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x | 6\}$.

69. Запиши ги табеларно множествата:

а) $A = \{a | a | 30\}$; б) $B = \{b | b | 60 \wedge 2 | b\}$; в) $C = \{c | c > 3 \wedge c < 20 \wedge 3 | c\}$.

8 ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

Треба да знаеш:

Ако се дадени множествата A и B, тогаш:

- $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$;
- $A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$;
- $A\setminus B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$;
- $A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$.

Одреди го пресекот на множествата A и B (70-73):

70. а) $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,e,i,o,u\}$; б) $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,4,6\}$.

71. а) $A=\{a|a \text{ е парен број}\}$, $B=\{b|b \text{ не е цел број}\}$;
б) $A=\varnothing$, $B=\mathbb{N}$.

72. а) $A=\{a|\ 2|a\}$, $B=\{b|\ 0<b<5\}$;
б) $A=\{a|a\in\mathbb{N}\wedge a\le 3\}$, $B=\{b|b\in\mathbb{N}\wedge b\ge 2\}$.

73. а) $A=\{a|\ a^2-4=0\}$, $B=\{b|\ b<2\}$;
б) $A=\{a|\ 21|a\}$, $B=\{b|\ 3|b\}$.

74. Во кој од дадените парови, множествата A и B се дисјунктни:
а) $A=\{x|x\in\mathbb{Z}\wedge x^2=9\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x\neq 3\}$;
б) $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x<3\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x>3\}$;
в) $A=\{x|x=1\vee x=3\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x|2\}$;
г) $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 1<x<5\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 5<x<10\}$.

75. Дадени се множествата $A=\{a|a\in\mathbb{N}\wedge a|6\}$, $B=\{1,3,5\}$ и $C=\{c|c\in\mathbb{N}\wedge c>0\wedge c<8\}$. Изврши ги назначените операции:
а) $A\cup B$; б) $A\cap C$; в) $(A\cup B)\cap C$;
г) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$; д) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$; ѓ) $((A\cup B)\cap C)\cap A$.

76. Одреди ги множествата $A\setminus B$, $B\setminus A$ и $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, ако:
а) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2\}$; б) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,b,a\}$.

77. Дадени се множествата $A=\{a|a^2-4=0\}, B=\{b|-3<b<3\wedge b\in\mathbb{Z}\}$ и $C=\{c|c\le 7\wedge c\in\mathbb{N}\}$. Одреди ги множествата:

а) $(A\setminus B)\setminus C$; б) $(A\cup B)\setminus C$;

в) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; г) $(A\cap B)\setminus C$.

78. Дадени се множествата:

$A=\{a|\ a|12\}$, $B=\{b|\ b|24\}$, $C=\{c|\ c|6\}$ и $D=\{2,3,4\}$. Утврди дека множествата A, C и D се подмножества на множеството B и одреди ги комплементите на множествата A, C и D во однос на множеството B.

79. Одреди ги партитивните множества на даденото множество:

а) $M=\{m,n\}$; б) $N=\varnothing$; в) $S=\{a,b,c,d\}$.

80. Запиши ги Декартовите производи $A\times B$ и $B\times A$, ако:

а) $A=\{a\}$, $B=\{b,c,d\}$; б) $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4,6\}$;

в) $A=\{a,b\}$, $B=\{2,3\}$. Дали за множествата A и B е точно равенството $A\times B=B\times A$?

9 НЕКОИ ЗАКОНИ ЗА ОПЕРАЦИИТЕ СО МНОЖЕСТВА

Докажи дека за операциите со множествата важат седните својства:

81. а) $A\cup B=B\cup A$ и $A\cap B=B\cap A$; *комутативно својство на унија и пресек*

б) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; *асоцијативно својство на унија и пресек*

в) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. *дистрибутивно својство на унијата во однос пресекот и обратно*

82. а) $(A\cap B)\setminus C=A\cap(B\setminus C)$; б) $A\cup A=A$ и $A\cap A=A$.

83. а) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$;

б) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

84. а) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

б) $(A\cup B)\setminus(A\cup C)=(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$.

85. а) $(A\cup B)'=A'\cap B'$;

б) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

86. Утврди дека формулата $(p\vee q)\wedge\rceil(p\vee r)\Leftrightarrow(q\wedge\rceil p)\wedge(q\wedge\rceil r)$ е тавтологија, а потоа докажи го идентитетот: $(A\cup B)\setminus(A\cup C)=(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$, ако A, B и C се непразни множества.

Докажи дека се точни тврдењата:

87. а) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$; б) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$.

88. а) $A\cup B\cup C=\varnothing\Leftrightarrow(A=\varnothing\wedge B=\varnothing\wedge C=\varnothing)$;

б) $(A\cup B)\subset C\Leftrightarrow A\subset C\wedge B\subset C$.

Која од наведените формули е точна:

89. а) $A\cap B=B\Rightarrow A\subset B$; б) $A\cap B=A\Rightarrow A\subset B$.

90. а) $A\cup B=B\Rightarrow B\subset A$; б) $A\cup B=A\Rightarrow B\subset A$.

91. Докажи дека се точни равенствата:

а) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

б) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

10 ЗАДАЧИ ПЛУС

92. За која вистинитосна вредност на исказот p се точни равенствата:

а) $\tau(\top\wedge p)=\top$; б) $\tau(p\wedge p)=\top$; в) $\tau(p\vee p)=\top$;

г) $\tau(\top\vee p)=\perp$; д) $\tau(p\vee p)=\perp$; ѓ) $\tau((\top\wedge p)\wedge\top)=\top$;

е) $\tau((\top\wedge p)\wedge p)=\top$; ж) $\tau((\perp\wedge p)\vee\perp)=\perp$;

з) $\tau((\top\vee p)\wedge p)=\top$; ѕ) $\tau((p\wedge\top)\vee(p\vee\top))=\perp$?

93. Нека p и q се кои било искази. Одреди ја вистинитосната вредност на исказните формули:

а) $q \Rightarrow ((\mathrm{T} \Rightarrow p) \Rightarrow \mathrm{T})$; б) $((p \wedge q) \wedge \perp) \Rightarrow ((p \vee q) \vee \mathrm{T})$;

в) $(q \vee \rceil q) \Rightarrow (p \wedge \rceil p)$; г) $(\perp \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow (\mathrm{T} \Rightarrow (p \wedge \rceil p))$.

94. Нека p е произволен исказ. Докажи дека е точно:

а) $\tau(\mathrm{T} \Rightarrow p) = \tau(p)$; б) $\tau(p \Rightarrow \mathrm{T}) = \mathrm{T}$;

в) $\tau(\perp \Rightarrow p) = \mathrm{T}$; г) $\tau(p \Rightarrow \perp) = \tau(\rceil p)$.

95. Нека со $F(p)$ е означена формулата $((\mathrm{T} \Rightarrow p) \Rightarrow \mathrm{T}) \Rightarrow p$. Одреди:

а) $F(\mathrm{T})$; б) $F(\perp)$; в) $F(F(\mathrm{T}))$; г) $F(F(\perp))$.

96. Со помош на логичките закони од страна 12 на учебникот и само со нив, докажи дека се тавтологии:

а) $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$; б) $(p \Rightarrow q) \wedge \rceil q \Rightarrow \rceil p$;

в) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; г) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$.

Без употреба на таблици, докажи дека следните исказни формули се тавтологии (97-98):

97. $(p \Rightarrow q) \wedge \rceil q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$;

98. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$;

99. $(\rceil p \Rightarrow q) \wedge (\rceil p \Rightarrow \rceil q) \Leftrightarrow p$.

100. Во секоја од три кутии има по едно топче, или бело, или црно или зелено. На првата кутија има натпис "бело", на втората "црно", а на третата "бело или зелено", но ниеден натпис не е вистинит. Одреди во која кутија какво топче има.

101. Марија, Билјана и Елена учат во иста паралелка и секоја од нив членува во една од секциите: математичка, хемиска или спортска секција. Спортистката е најмлада и нема ни брат ни сестра што учи во истото училиште. Билјана седи во клупа со братот на Елена и е најстара од членовите во хемиската секција. Одреди ја секцијата во која членува секоја од споменатите ученички.

102. Моливите A, B и C имаат различна боја, еден е бел, еден црвен и еден син. Одреди ја бојата на секој молив, ако се знае дека само едно од следните три тврдења е точно:
а) A е црвен молив; б) B не е црвен молив; в) C не е син молив.

103. Разговараат тројцата пријатели: Беличанец, Црвенковски и Жута. Црвенокосиот му се обраќа на Беличанец: "Интересно, еден од нас има бела коса, еден црвена и еден жолта, но ниеден ја нема бојата на косата на која укажува неговото презиме". Каква боја на косата има секој од нив?

104. Симетралата на кој било внатрешен агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови кои се пропорционални со страните што го образуваат тој внатрешен агол. Докажи!

105. Ако за страните a, b и c на триаголникот ABC важи равенството $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, тогаш триаголникот е рамностран. Докажи!

106. Ако $x, y \in \mathbb{R}$, тогаш $|x+y| \leq |x|+|y|$. Докажи!

107. Симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка. Докажи!

108. Симетралите на аглите во триаголникот се сечат во една точка. Докажи!

109. Нека $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^+$ и $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^+$.

Ако $a_1+a_2+a_3+a_4 \geq 4$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 1$, тогаш

$\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$. Докажи!

110. Кај правоаголниот триаголник ABC важи $t_a^{\,2}+t_b^{\,2}=5t_c^{\,2}$ само ако t_a, t_b, t_c се должини на тежишните линии во тој триаголник. Докажи!

111. Ако h_1, h_2 и h_3 се висини во триаголникот ABC и $\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2+\left(\dfrac{h_1}{h_3}\right)^2=1$,

тогаш тој триаголник е правоаголен. Докажи!