

Треба да знаеш:



Аголот φ мерен во радијани се претвора во степени по формулата:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot \varphi}{\pi}$$



Аголот α мерен во степени се претвора во радијани по формулата:

$$\varphi = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}$$



Должина на кружниот лак: $l = r\varphi = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$. (r – радиус на кружницата, α – централен агол што одговара на кружниот лак.)



Плоштина на кружен исечок: $P = \frac{rl}{2} = \frac{1}{2} r^2 \varphi = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} \alpha^\circ$.

1. Кои се мерни единици за мерење на агли?

2. Што е радијан?

3. Изрази ги во радијани аглите:

а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 135^\circ$; г) $\alpha = 270^\circ$.

4. Изрази ги во радијани аглите:

а) $\alpha = 25^\circ 30'$; б) $\alpha = 12^\circ 15'$; в) $\alpha = 18,5^\circ$; г) $\alpha = 6,4^\circ$.

Изрази ги во степени аглите изразени во радијани:(5-7).

5. а) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) $\varphi = \frac{\pi}{12}$; г) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

6. а) $\varphi = \frac{7\pi}{12}$; б) $\varphi = \frac{8\pi}{9}$; в) $\varphi = \frac{13\pi}{15}$; г) $\varphi = \frac{9\pi}{10}$.

7. а) $\varphi = 0,5$; б) $\varphi = \frac{3}{2}$; в) $\varphi = 1,8$; г) $\varphi = 0,21$.

8. Колкав е внатрешниот агол, мерен во степени, на правилен:
а) петаголник; б) деветаголник.

9. Колкав е централниот агол, мерен во радијани, на правилен:
а) осумаголник; б) дванаесетаголник.

10. Два агли на триаголникот се: $69^\circ 43'$ и $87^\circ 47'$. Пресметај го третиот агол во радијани.

11. Аглите на триаголникот се однесуваат како: 2:3:4. Одреди ги аглите на триаголникот во степени и радијани.
12. Аглите на четириаголникот се однесуваат како 3:4:5:6. Одреди ги аглите на четириаголникот во степени и радијани.
13. Колкав агол ќе опише големата стрелка на часовникот за:
 а) 5 min; б) 30 min; в) 1h?
 Големината на аголот изрази ја во степени и радијани.
14. Пресметај ја должината на кружниот лак со радиус 3 rad, чиј централен агол е: а) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; в) $\alpha = 30^\circ$; г) $\alpha = 120^\circ$.
15. Пресметај ја плоштината на кружниот исечок, ако радиусот на кружницата $r=2$, а централниот агол е:
 а) $\alpha = 45^\circ$; б) $\alpha = 135^\circ$; в) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

2

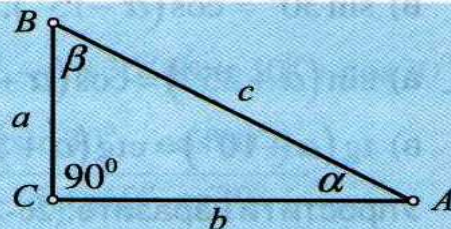
ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

3

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

Треба да знаеш:

Тригонометриски функции од остар агол α во правоаголниот триаголник се:



$$\sin \alpha = \frac{\text{спротивна катета}}{\text{хипотенуза}} = \left(\frac{a}{c}\right); \quad \cos \alpha = \frac{\text{прилегната катета}}{\text{хипотенуза}} = \left(\frac{b}{c}\right);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{спротивна катета}}{\text{прилегната катета}} = \left(\frac{a}{b}\right); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{прилегната катета}}{\text{спротивна катета}} = \left(\frac{b}{a}\right).$$

$$\sin \alpha = \cos \beta; \quad \cos \alpha = \sin \beta; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta, \text{ ако и само ако } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

16. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аглите α и β на правоаголниот триаголник, ако a и b се катети, а c хипотенуза на триаголникот:

✓ а) $a=3, b=4$; б) $a=8, c=10$; в) $b=15, c=17$; г) $a=12, b=35$.

Конструирај го остриот агол α , ако е дадена вредноста на тригонометријската функција:(17-18).

17. а) $\sin \alpha = \frac{5}{7}$; б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos \alpha = 0,6$; г) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$; б) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; в) $\operatorname{ctg} \alpha = 3$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$.

19. Даден е правоаголник со страни $a = 56$; $b = 33$. Одреди ја неговата дијагонала и вредностите на синусот и косинусот на аголот што го зафаќа дијагоналата со поголемата страна на триаголникот.

20. Даден е правоаголен триаголник со катети $a = 7,3$ cm; $b = 4,8$ cm. Одреди ги вредностите на функциите со точност од две децимали:

а) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$; б) $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\operatorname{tg} \beta$ и $\operatorname{ctg} \beta$.

Одреди го остриот агол α , ако се знае:(21-25).

21. а) $\sin 45^\circ = \sin \alpha$; б) $\cos 50^\circ = \cos \alpha$; в) $\sin \alpha = \sin 5^\circ 30'$; г) $\cos \alpha = \cos 29^\circ 30'$.

22. а) $\sin 10^\circ = \cos \alpha$; б) $\sin \alpha = \cos 49^\circ 30'$; в) $\sin \alpha = \cos 20^\circ$; г) $\cos \alpha = \sin 59^\circ 30'$.

23. а) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 73^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 80^\circ = \operatorname{ctg} \alpha$; в) $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} 73^\circ$; г) $\operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{ctg} \alpha$.

✓ 24. а) $\operatorname{tg}(\alpha + 30^\circ) = \operatorname{ctg} 10^\circ$;

б) $\operatorname{ctg}(\alpha - 10^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ$;

в) $\sin 30^\circ = \cos(\alpha - 15^\circ)$;

г) $\cos 60^\circ = \sin(\alpha + 20^\circ)$.

25. а) $\sin(\alpha + 35^\circ) = \cos(\alpha + 35^\circ)$;

б) $\cos(50^\circ + \alpha) = \sin(\alpha + 5^\circ)$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha + 10^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 80^\circ)$;

г) $\operatorname{ctg}(\alpha + 1^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha + 87^\circ)$.

Упрости ги изразите:(26-28).

26. ✓ а) $\frac{2 \sin 10^\circ + 3 \cos 80^\circ}{3 \sin 10^\circ - 2 \cos 80^\circ}$;

б) $\frac{5 \sin 40^\circ + 7 \cos 50^\circ}{3 \sin 40^\circ}$;

в) $\frac{2 \sin 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ + 3 \cos 70^\circ}{3 \operatorname{ctg} 70^\circ + 5 \sin 20^\circ - 2 \operatorname{tg} 20^\circ}$;

г) $\frac{4 \operatorname{tg} 35^\circ + 2 \operatorname{ctg} 55^\circ}{6 \operatorname{ctg} 55^\circ}$.

27. а) $\frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{ctg} 10^\circ} + \frac{\operatorname{ctg} 53^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ}$;

б) $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ} - \frac{\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ}$.

28. а) $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{\operatorname{ctg} 62^\circ}{\operatorname{tg} 28^\circ}$;

б) $\frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\cos^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ}$.

29. Упрости ги изразите, ако се знае дека $\alpha + \beta = 90^\circ$:

а) $\sin \alpha + \cos \beta$; б) $\cos \alpha - \sin \beta$; в) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$; г) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

Треба да знаеш:

Агол Функција	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Одреди ја вредноста на изразот:(30-33).

30. а) $(2 \cos 60^\circ + 4 \sin 30^\circ) \cdot \sin 90^\circ$; б) $(\operatorname{ctg} 30^\circ - \cos 30^\circ)(\operatorname{ctg} 30^\circ + \cos 30^\circ)$.

31. а) $\frac{\cos 60^\circ}{1 - \sin 30^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{1 - \cos 60^\circ}$; б) $\frac{(\sin 30^\circ - \cos 60^\circ)^2}{5 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}$.

32. а) $\frac{(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)^2}{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{ctg} 45^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}$.

33. а) $(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 60^\circ)^2$; б) $(\sin 60^\circ - \cos 30^\circ)^2$.

Пресметај:(34-43).

34. а) $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ$; б) $2 \sin 45^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - 3 \operatorname{ctg} 45^\circ$.

35. а) $\cos 45^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + 2 \operatorname{ctg} 45^\circ$; б) $\sin 60^\circ + 2 \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ$.

36. а) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ$; б) $2 \sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

37. а) $4 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$; б) $3 \operatorname{tg}^2 30^\circ - 4 \sin 45^\circ \cos 60^\circ$.

38. a) $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.

39. a) $\sin \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;

б) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^3 \frac{\pi}{4}$.

40. a) $\frac{2 \sin 30^\circ - 1}{2 \sin 30^\circ + 1}$;

б) $\frac{2 \cos 45^\circ + 1}{2 \cos 45^\circ - 1}$.

41. a) $\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ}$.

42. a) $\frac{\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 45^\circ}{\operatorname{ctg}^2 30^\circ - \operatorname{ctg}^2 45^\circ}$.

43. a) $\frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6}}{1 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{6}}$;

б) $\frac{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{4}}$.

44. Провери дали е точно равенството:

а) $2 \cos 30^\circ + 3 \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ$; б) $\frac{\sin 30^\circ}{1 - \cos 60^\circ} + \frac{\cos 60^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = 2$;

в) $(\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ)^2 = (\sin 90^\circ + \cos 0^\circ)^2$; в) $\frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} + \frac{1}{\operatorname{ctg} 45^\circ} = 2(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)^3$.

5

ВРСКА МЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ИСТ АГОЛ

Треба да знаеш:

Основни тригонометриски зависимости се:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Одреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции (45-52), ако е:

45. а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$;

б) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$;

в) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$.

46. а) $\sin \alpha = \frac{6a}{9+a^2}$;

б) $\sin \alpha = \frac{2a}{a^2+1}$;

в) $\sin \alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

47. а) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$;

б) $\cos \alpha = \frac{20}{29}$.

$$48. \text{ a) } \cos \alpha = \frac{10a}{a^2 + 25};$$

$$49. \text{ a) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12};$$

$$50. \text{ a) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 - 1}{2a};$$

$$51. \text{ a) } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{21}{20};$$

$$52. \text{ a) } \operatorname{ctg} \alpha = 2,4;$$

Упрости го изразот:

$$53. \text{ a) } \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$54. \text{ a) } \sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$55. \text{ a) } \sqrt{1 + \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 - \sin \alpha};$$

$$56. (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2.$$

$$57. \text{ a) } \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1;$$

$$\text{ б) } \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha};$$

$$\text{ в) } \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$58. \text{ a) } \frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}.$$

$$59. \text{ a) } \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}.$$

$$60. \text{ a) } \frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$61. \text{ a) } \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$62. \text{ a) } \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$63. \text{ a) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha};$$

$$\text{ б) } \frac{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha}.$$

$$64. \text{ a) } \frac{(1 - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha};$$

$$65. \text{ a) } \frac{1 + \sin \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$66. \text{ a) } \frac{1 - \sin \alpha - \cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha};$$

$$67. \text{ a) } \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta};$$

$$68. \text{ a) } \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha; \quad \text{b) } \operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha;$$

$$69. \text{ a) } \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}; \quad \text{b) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha};$$

$$70. \text{ a) } \sin^3 \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \cos^3 \alpha;$$

$$71. \text{ a) } \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$72. \text{ a) } \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$73. \text{ a) } (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos \alpha;$$

$$74. \text{ a) } \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$75. \text{ a) } (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - 2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$76. \text{ a) } (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$77. \text{ a) } \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha};$$

$$78. \text{ a) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cos^2 \alpha};$$

$$79. \text{ a) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha};$$

$$80. \text{ a) } \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$81. \text{ a) } \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin \alpha};$$

$$82. \text{ a) } \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{1 + \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{1 - \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta};$$

$$\text{B) } \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$\text{B) } \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\text{b) } \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$\text{b) } \frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\text{b) } (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \sin \alpha;$$

$$\text{b) } \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$\text{b) } (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - 2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{b) } (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{b) } \frac{\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\cos^2 \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$83. \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \sin \alpha - 1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{1 + \sin \alpha}.$$

Докажи ги следните идентитети (84 - 90):

$$84. \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \sin \alpha \neq 0.$$

$$85. \text{ а) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}, \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0; \text{ б) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos^2 \alpha}, \cos \alpha \neq 0.$$

$$86. \text{ а) } \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \text{ б) } \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha;$$

$$\text{ в) } \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha, \cos \alpha \neq 0.$$

$$87. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \text{ б) } \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$88. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}; \cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0.$$

$$89. \text{ а) } \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha, \cos \alpha \neq 0;$$

$$\text{ б) } \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}, \cos \alpha \neq -1, \sin \alpha \neq 0.$$

$$90. \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2.$$

91. Елиминирај го параметарот t од равенките:

$$\text{ а) } x = 3 \cos t, y = 3 \sin t; \text{ б) } x = r \cos t, y = r \sin t; \text{ в) } x = 5 \cos t, y = 3 \sin t.$$

92. Одреди ги ги $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ ако $3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 5$.

Пресметај ја вредноста на следните изрази:

$$93. \text{ а) } \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}, \text{ за } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}; \text{ б) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}, \text{ за } \sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$94. \text{ а) } \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}, \text{ за } \cos \alpha = \frac{12}{13}; \text{ б) } \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}, \text{ за } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}.$$

95. Дадено е $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Одреди го $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Треба да знаеш:

- ☛ Ако аголот α расте од 0° до 90° , тогаш: $\sin \alpha$ расте од 0 до 1; $\cos \alpha$ опаѓа од 1 до 0, $\operatorname{tg} \alpha$ расте од 0 до $+\infty$; $\operatorname{ctg} \alpha$ опаѓа од $+\infty$ до 0.
- ☛ За секое $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 90^\circ)$ и $\alpha_1 < \alpha_2$, следува дека $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$; $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$; $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$; $\operatorname{ctg} \alpha_1 > \operatorname{ctg} \alpha_2$.

Кои од дадените тврдења се точни (1 - 4):

96. а) $\sin 44^\circ < \sin 45^\circ$; б) $\sin 46^\circ > \sin 45^\circ$; в) $\sin 1^\circ > \sin 89^\circ$; г) $\sin \alpha \leq \sin 90^\circ$.
97. а) $\cos 44^\circ < \cos 45^\circ$; б) $\cos 46^\circ > \cos 45^\circ$; в) $\cos 1^\circ > \cos 89^\circ$; г) $\cos \alpha \leq \cos 0^\circ$.
98. а) $\sin 20^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin 40^\circ < \frac{1}{2}$; в) $\sin 25^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin 75^\circ > \frac{1}{2}$.
99. а) $\cos 20^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos 40^\circ < \frac{1}{2}$; в) $\cos 25^\circ > \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos 75^\circ > \frac{1}{2}$.
100. Кој од дадените броеви е најголем:

а) $\sin 60^\circ, \sin 20^\circ, \frac{1}{2}$; б) $\cos 20^\circ, \cos 30^\circ, \frac{1}{2}$;

в) $\sin 18^\circ, \frac{1}{2}, \sin 72^\circ$; г) $\cos 40^\circ, \frac{1}{2}, \cos 60^\circ$.

101. Одреди кој број е помал:

а) $\operatorname{tg} 1^\circ$ или $\operatorname{tg} 89^\circ$; б) $\operatorname{tg} 1^\circ$ или $\operatorname{ctg} 1^\circ$; в) $\operatorname{tg} 89^\circ$ или $\operatorname{ctg} 89^\circ$;

г) $\operatorname{ctg} 20^\circ$ или $\operatorname{tg} 20^\circ$.

Кои од дадените тврдења се точни:

102. а) $\operatorname{tg} 35^\circ < 1$; б) $\sqrt{3} < \operatorname{tg} 10^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 80^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $1 < \operatorname{tg} 46^\circ$.

103. а) $\operatorname{ctg} 1^\circ < 1$; б) $\operatorname{ctg} 46^\circ > 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{3} > \operatorname{ctg} 80^\circ$; г) $\sqrt{3} < \operatorname{ctg} 38^\circ$.

104. Подреди ги по големина вредностите на тригонометриските функции почнувајќи од најголемата:

а) $\operatorname{tg}11^{\circ}$, $\operatorname{tg}21^{\circ}$, $\operatorname{tg}41^{\circ}$, $\operatorname{tg}51^{\circ}$, $\operatorname{tg}31^{\circ}$;

б) $\operatorname{ctg}11^{\circ}$, $\operatorname{ctg}51^{\circ}$, $\operatorname{ctg}31^{\circ}$, $\operatorname{ctg}41^{\circ}$, $\operatorname{ctg}21^{\circ}$.

105. Спореди ги броевите:

а) $\sin 35^{\circ}$ и $\sin 53^{\circ}$; б) $\sin 73^{\circ}$ и $\cos 73^{\circ}$; в) $\operatorname{tg}47^{\circ}$ и $\operatorname{tg}57^{\circ}$; г) $\operatorname{ctg}37^{\circ}$ и $\operatorname{tg}53^{\circ}$.

106. Одреди го знакот на разликата:

а) $\sin 35^{\circ} - \sin 53^{\circ}$; б) $\cos 27^{\circ} - \cos 72^{\circ}$; в) $\operatorname{tg}52^{\circ} - \operatorname{tg}35^{\circ}$.

107. Одреди го знакот на изразот:

а) $\frac{\sin 67^{\circ} - \sin 23^{\circ}}{\cos 15^{\circ} - \cos 25^{\circ}}$;

б) $\frac{\cos 23^{\circ} - \sin 35^{\circ}}{\sin 57^{\circ} - \cos 26^{\circ}}$.

108. Одреди го знакот на изразот:

а) $\frac{\operatorname{tg}35^{\circ} - \operatorname{ctg}25^{\circ}}{\operatorname{ctg}63^{\circ} - \operatorname{ctg}53^{\circ}}$;

б) $\frac{\operatorname{ctg}73^{\circ} - \operatorname{tg}25^{\circ}}{\operatorname{ctg}43^{\circ} + \operatorname{tg}35^{\circ}}$;

в) $\frac{\sin 35^{\circ} - \cos 27^{\circ}}{\operatorname{tg}35^{\circ} - \operatorname{ctg}26^{\circ}}$;

г) $\frac{\cos 27^{\circ} + \sin 35^{\circ}}{\operatorname{ctg}73^{\circ} - \operatorname{tg}15^{\circ}}$.

7

РЕШАВАЊЕ ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Треба да знаеш:

- Да се реши правоаголен триаголник значи да се одредат неговите основни елементи.
- Да се реши правоаголен триаголник треба да се дадени два елемента од кои едниот треба да е страна на триаголникот.

Реша го правоаголниот триаголник ако:

109. а) $c = 23\text{cm}$, $\beta = 38^{\circ}$;

б) $c = 3\text{dm}$, $\alpha = 36^{\circ}52'$.

110. а) $b = 473\text{cm}$, $\alpha = 16^{\circ}40'$;

б) $a = 20\text{cm}$, $\alpha = 35^{\circ}52'$.

111. а) $a = 12\text{cm}$, $c = 110\text{cm}$; б) $a = 24\text{cm}$, $b = 32\text{cm}$; в) $b = 6\text{cm}$, $c = 7,5\text{cm}$.

112. а) $a : c = 3 : 5$, $b = 8\text{cm}$;

б) $b : c = 12 : 13$, $a = 15\text{cm}$.

113. а) $a : b = 5 : 12$, $c = 52\text{cm}$;

б) $b : a = 21 : 20$, $c = 58\text{cm}$.

114. а) $P = 6\text{cm}^2$, $a = 3\text{cm}$;

б) $P = 180\text{cm}^2$, $b = 40\text{cm}$.

115. а) $P = 30\text{cm}^2$, $\alpha = 22^\circ 37'$;

б) $P = 24\text{cm}^2$, $\beta = 53^\circ 8'$.

116. Одреди ги аглите на рамнокракиот триаголник, чија основа е 48 cm и крак 30 cm.

117. Основите на рамнокрак трапез се 15 cm и 12,2 cm, а кракот 4 cm. Одреди ги аглите на трапезот.

118. На која височина се искачил патникот кој одел по прав пат долг 2 km и со наклонет агол од $4^\circ 10'$?

119. На која висина допираат пожарникарските скали долги 25 m, ако се наведнати под агол од 65° ?

8

ЗАДАЧИ ПЛУС

120. Пресметај ја плоштината на кружен исечок ако се познати лакот и централниот агол:

а) $l = 25\text{cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$;

б) $l = 30\text{cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

в) $l = 28\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$;

г) $l = 12\text{cm}$, $\alpha = 180^\circ$.

121. Дали се можни равенствата:

а) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = a$, ако $a > 1$;

б) $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = a$, ако $a > 1$;

в) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = a$, ако $a > 3$?

122. Одреди: $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ако $f(x) = \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$.

123. Геометриски и алгебарски докажи дека за секое α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) важи $\sin \alpha + \cos \alpha \geq 1$.

Упрости ги изразите (124 – 136):

124. а) $\frac{\sin^4 \alpha - \sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} + \frac{\cos^4 \alpha - \cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$; б) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \beta}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} + \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \beta}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

$$125. \text{ a) } \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}; \quad \text{б) } \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta};$$

$$\text{в) } \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}.$$

$$126. \frac{1 + \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{4 - 2 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha - 1}{1 - \sin \alpha} + \frac{3 \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

$$127. \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 + 3 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$128. \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} + \frac{1}{(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2}.$$

$$129. \text{ a) } \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$\text{б) } \frac{1 - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1 + \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha};$$

$$\text{в) } \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{1 + \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$130. 2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2 - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 2}{1 + \sin \alpha}.$$

$$131. \frac{1 + \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1 + 3 \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$132. \frac{1 + \cos \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{2}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

$$133. \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 4 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{2 \cos \alpha + \sin \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha - \sin \alpha + 2}{1 + \cos \alpha}.$$

$$134. \text{ a) } \frac{1 - (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)}{\cos^4 \alpha};$$

$$\text{б) } \frac{1 - (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)}{\sin^4 \alpha}.$$

$$135. \text{ a) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos^2 \alpha};$$

$$\text{б) } \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{(\sin \alpha - \cos \alpha) \sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$136. \text{ a) } \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)}{\cos^4 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1}{\cos^4 \alpha}.$$

137. Елиминирај го параметарот t од равенките:

- а) $x = a \cos t, y = b \sin t$; б) $x = 5 + 3 \cos t, y = 7 + 3 \sin t$;
в) $x = p + r \cos t, y = q + r \sin t$.

138. Докажи:

- а) $(2 - \sin^2 \alpha)(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(2 - \cos^2 \alpha)$;
б) $(2 - \cos^2 \alpha)(1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) = (2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)(2 - \sin^2 \alpha)$.

139. Докажи дека изразот не зависи од x :

- а) $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$; б) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$;
в) $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^4 x + 2 \sin^4 x \cos^2 x$;
г) $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$.

140. Изрази ги со помош на функцијата $\operatorname{tg} \alpha$ дробките:

- а) $\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}$; б) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}$;
в) $\frac{2 \sin \alpha - 3 \sin^3 \alpha}{5 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha}$.

141. Ако е : $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$, одреди ги:

- а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

142. Во правоаголниот триаголник p и q се проекции на катетите a и b на хипотенузата c , а h е висина кон хипотенузата. Реши го триаголникот ако е дадено:

- а) $a = 3 \text{ cm}, p = \frac{9}{5} \text{ cm}$; б) $p = 3,6 \text{ cm}, \alpha = 30^\circ 52'$;
в) $h = \frac{60}{13} \text{ cm}, \alpha = 22^\circ 37'$; г) $q = 16 \text{ cm}, \beta = 53^\circ 8'$.

143. Дадена е кружница со радиус $r = 9 \text{ cm}$. Од точката A , која од центарот на кружницата е оддалечена 41 cm , повлечени се тангенти на кружницата. Одреди го аголот што го образуваат тангентите.

144. Во кружница е повлечена тетива со должина t на која и одговара централниот агол α . Одреди го радиусот на кружницата и централното растојание d на тетивата, со помош на t и α .

145. Дадена е страната на правоаголникот и аголот φ меѓу дијагоналите кој е спроти страната a . Одреди ја страната b и дијагоналата d со помош на φ и a .