1 НИЗА ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

Треба да знаеш

- Ако на секој природен број $n=1,2,3,...$ по некое правило или закон му одговара по еден определен (реален) број a_n, тогаш за броевите $a_1, a_2, a_3,...,a_n,...$ велиме дека определуваат ***низа*** од реални броеви. Низата кратко ја означуваме со симболот (a_n).
- Секое пресликување f од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$ се вика ***бесконечна низа*** од реални броеви.
- Секое пресликување f од множеството $\{1,2,3,...,k\}\subset\mathbb{N}$ во множеството $\mathbb{R}$ се вика ***конечна низа*** од реални броеви или $k-$***члена низа***.
- За низата (a_n) велиме дека ***расте*** ако $a_n < a_{n+1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.
  За низата (a_n) велиме дека ***опаѓа*** ако $a_n > a_{n+1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.
  За низата (a_n) велиме дека е ***неопаднувачка*** ако $a_n \le a_{n+1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.
  За низата (a_n) велиме дека е ***нерастечка*** ако $a_n \ge a_{n+1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.
- Низата (a_n) е ***ограничена*** ако секој нејзин член по апсолутна вредност е помал од некој позитивен број k, т.е. ако постои позитивен број k, таков што за секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|<k$.
- Низата што не е ограничена се вика ***неограничена*** низа.

1. Запиши ја низата за која законот f гласи:
а) членот a_n е третиот степен на природниот број n;
б) членот a_n е $n-$ти степен од бројот 3;
в) членот a_n е $n-$тиот прост природен број (само првите седум члена).

2. Дефинирај (запиши дефиниција) за:
а) бесконечна низа од реални броеви; б) конечна низа од реални броеви.

3. Дали знаењето на конечен број први членови на една низа ја определуваат низата еднозначно? Образложи го одговорот и илустрирај го на конкретен пример.

4. Општиот член на низата е:

а) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$; б) $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n}{n+1}$; в) $a_n=(-1)^n\cdot 2^n$.

Запиши ги првите пет члена на низата и претстави ги со соодветни точки на бројната оска.

✓

5. Запиши ги првите четири члена на низата со општ член:

а) $a_n = 1+\frac{1}{n}$;   б) $a_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$;   в) $a_n = 2^{1-n}$;   г) $a_n = 3^{-n}$;

д) $a_n = \frac{1}{n^n}$;   ѓ) $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$;   е) $a_n = \sin\frac{n\cdot\pi}{2}$;

ж) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;   з) $a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}, & \text{ако } n \text{ е непарен број.} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{n}, & \text{ако } n \text{ е парен број.} \end{cases}$

✓

6. Запиши ги првите пет члена на низата, ако општиот член е:

а) $a_n = (-1)^n$;   б) $a_n = 1+(-1)^n$;   в) $a_n = \frac{3n+1}{n^2+1}$;   г) $a_n = 2^{-n}$;

д) $a_n = e^{-n} + \log n$;   ѓ) $a_n = \sin\frac{1}{n}$;   е) $a_n = 5$.

7. Претпоставувајќи дека правилото кое го воочуваме меѓу наведените членови на низата важи и за следните, напиши еден од можните изрази за општиот член:

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$; б) $-1, 2, 7, 14, 23, 34, 47, \ldots$; в) $\frac{2}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{10}, \frac{5}{17}, \ldots$; г) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$

8. Запиши ги првите седум члена на низата зададена со:

а) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3$;   б) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + n^2$;

в) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$;   г) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n\cdot a_n$.

9. Запиши ги првите шест члена на низата зададена со:

а) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ (*низа на Фибоначи*);

б) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$;

в) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = 2a_n - 3a_{n+1}$.

10. Претпоставувајќи дека правилото кое го воочуваме меѓу наведените членови на низата важи и за следните, напиши еден од можните изрази за општиот член:

а) $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$;   б) $2, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt[3]{6}}, \frac{16}{\sqrt[4]{24}}, \ldots$;   в) $\frac{1}{2^2}, \frac{13}{2^3}, \frac{19}{2^4}, \frac{97}{2^5}, \ldots$;

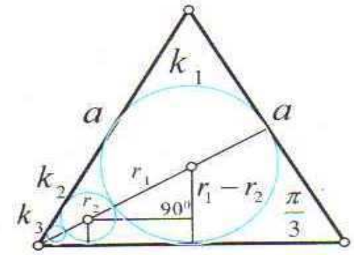
г) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ldots$

11. Во круг со радиус r_1 е вишан квадрат, а во тој квадрат е вписан круг со радиус r_2 итн.

а) Одреди ги првите пет члена на низата $r_1, r_2, ..., r_n, r_{n+1}, ...$ во зависност од r_1.

б) Запиши го општиот член на низата.

12. Во рамностран триаголник со страна a е впишана кружница k_1. Потоа е впишана кружница k_2 која ги допира k_1 и краците на аголот итн. Одреди го општиот член на низата $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ каде што r_i е радиусот на кружницата k_i и зависи од страната a.



13. Докажи дека следниве низи монотоно опаѓаат:

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, ...$; б) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ...$; в) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, ...$; г) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, ...$.

14. Докажи дека следниве низи монотоно растат:

а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$; б) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, ...$; в) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, ...$; г) $4, 7, 10, 13, ...$.

15. Испитај ја монотоноста на низата чиј општ член е:

а) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$; в) $a_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$; г) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$;

д) $a_n = 2^n$; ѓ) $a_n = \frac{1}{2^n}$; е) $a_n = 1 + 2(n-1)$; ж) $a_n = \frac{1}{n!}$; з) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

16. Која од следниве низи е ограничена:

а) $a_n = \frac{n}{n+1}$; б) $a_n = \frac{2}{n}$; в) $a_n = \frac{n}{2n+1}$; г) $a_n = (-1)^n n$;

д) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$; ѓ) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; е) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$;

ж) $1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142; ...$ з) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$?

17. За низата $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$:

а) Напиши го општиот член a_n.

б) Докажи дека монотоно опаѓа и е ограничена.

б) За кои вредности на n е исполнето неравенството:

$i)\ a_n < 0,01$; $ii)\ a_n < 0,001$?

2 АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Треба да знаеш

- Низа од броеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ такви што почнувајќи од вториот член, разликата меѓу секој член и неговиот претходник е константа, т.е. $a_{n+1} - a_n = d$ за секој $n \in \mathbb{N}$ се вика ***аритметичка низа*** или ***аритметичка прогресија***. Таа е напоно определена ако се дадени првиот член и разликата.

- n – от член на аритметичката прогресија се одредува со формулата
$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

18. Кога аритметичката прогресија расте, а кога опаѓа?

19. Одреди која од следниве низи е аритметичка прогресија:

а) $3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, ...;$ б) $6,\ 2,\ -2,\ -6,\ -10, ...;$ в) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, ...$

г) $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, ...$ д) $\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}, ...$ ѓ) $3a-2b,\ 4a-b,\ 5a,\ 6a+b, ...$

Според зададените податоци напиши неколку членови на аритметичката прогресија (20 - 22):

20. а) $a_1 = 2,\ d = 3;$ б) $a_1 = -8,\ d = 4;$ в) $a_1 = 5,\ d = -\frac{1}{2};$

г) $a_1 = -\frac{3}{2},\ d = \frac{1}{2};$ д) $a_1 = \alpha,\ d = \beta;$ ѓ) $a_1 = 4a+5b,\ d = -a-b.$

21. а) $a_1 = 3,\ a_2 = 5;$ б) $a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2};$ в) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{2};$

г) $a_1 = a,\ a_2 = b;$ д) $a_1 = a+b,\ a_2 = a-b;$ ѓ) $a_1 = a+3,\ a_2 = a-3.$

22. а) $a_6 = 9,\ d = 2;$ б) $a_5 = 13,\ d = -2;$ в) $a_7 = 3{,}5,\ d = 1{,}5;$

г) $a_4 = -\frac{7}{2},\ d = -1;$ д) $a_5 = \alpha,\ d = \delta;$ ѓ) $a_5 = 2a+2b,\ d = b-2a.$

23. Одреди го a_n во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_1 = 5,\ d = 3,\ n = 7;$ б) $a_1 = -8,\ d = 5,\ n = 10;$

в) $a_1 = \frac{1}{3},\ d = -\frac{1}{6},\ n = 9;$ г) $a_1 = a,\ d = b,\ n = 100.$

24. Пресметај го n во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_n = 25,\ d = 2,\ a_1 = 3;$ б) $a_n = -11,\ d = -\frac{1}{2},\ a_1 = -3\frac{1}{2};$

в) $a_n = 25,\ d = 3,\ a_1 = 4;$ г) $a_n = -\frac{3}{2},\ d = -\frac{1}{4},\ a_1 = \frac{1}{2}.$

25. Пресметај го d во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_1 = 5,\ a_6 = 15;$ б) $a_1 = 3,\ a_{15} = -53;$

в) $a_5 = 13,\ a_{10} = 28;$ г) $a_4 = -13,\ a_{10} = -43.$

26. Одреди ја аритметичката прогресија, ако:

а) $a_3 = 11,\ a_6 = 17;$ б) $a_6 = 0,\ a_{15} = -27;$

в) $a_7 = 50,\ a_{22} = 65;$ г) $a_{17} = -22,\ a_7 = -2.$

27. Одреди ги првите пет члена на аритметичката прогресија, ако:

а) $a_1 + a_4 = -20,\ a_5 = -6;$ б) $a_3 + a_7 = 4,\ a_2 + a_{14} = -8;$

в) $a_1 + a_4 + a_{11} = 35,\ a_3 + a_6 = 20;$ г) $a_2 + a_5 + a_7 = 53,\ a_8 - a_3 = 20.$

28. Разликата на третиот и шестиот член на една аритметичка прогресија е 9, а збирот на вториот и петтиот член е 19. Одреди ја таа прогресија.

29. Одреди ја аритметичката прогресија, ако:

а) $\frac{a_7}{a_2} = 4,\ a_2 + a_6 = 22;$ б) $a_5 : a_7 = 9,\ a_2 - a_6 = 16;$

в) $a_3 : a_8 = 3 : 8,\ a_1 + a_4 + a_8 = 26;$ г) $a_9 : a_1 = 2,\ a_2 + a_3 - a_7 = 10.$

30. Напиши ја аритметичката прогресија чии членови ја задоволуваат релацијата:

а) $2a_2 + a_4 = 7,\ 5a_5 - 6a_3 = 17;$ б) $2a_2 + 3a_3 - a_7 = -14,\ 2a_4 + a_5 = 15.$

31. Одреди ја аритметичката прогресија кај која е:

а) $a_6^{\ 2} = a_1,\ a_3 + a_4 = 30;$ б) $a_1^{\ 2} + a_6^{\ 2} = 37,\ a_4 + a_7 = 11;$

в) $a_2 + a_4 = 16,\ a_1 \cdot a_5 = 28;$ г) $2a_1 + 5a_6 = 4,\ a_7 \cdot a_8 = 12.$

32. Докажи дека за аритметичката прогресија важат релациите:

$a_{n-k} = a_n - kd; \qquad a_{n+k} = a_n + kd.$

33. Меѓу броевите a и b, $(a \neq b)$ интерполирај n броеви, кои со дадените образуваат аритметичка прогресија.

34. Меѓу броевите a и b интерполирај n броеви, кои со дадените образуваат аритметичка прогресија:

а) $a=5,\ b=15,\ n=4;$ б) $a=3,\ b=7,\ n=7;$ в) $a=1,\ b=5,\ n=6;$

г) $a=-14,\ b=-7,\ n=9;$ д) $a=-3,\ b=1,\ n=7.$

35. Меѓу $a-b$ и $a+b$ интерполирај аритметичка прогресија од четири члена.

3 ЗБИР НА ПРВИТЕ n ЧЛЕНОВИ НА АРИТМЕТИЧКАТА ПРОГРЕСИЈА

Треба да знаеш

- Ако ги разгледуваме само првите n членови од дадена аритметичка прогресија (a_n), тогаш за $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ велиме дека е ***конечна аритметичка прогресија*** или аритметичка прогресија со конечен број членови.

- Во аритметичката прогресија со конечен број членови, збирот на кои било два члена што се еднакво оддалечени од крајните членови е еднаков со збирот на крајните членови, т.е.

$$\boxed{a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n,\ \ 2 \le k \le n.}$$

- Секој член на аритметичката прогресија освен првиот е аритметичка средина од својот претходник и својот следбеник, т.е.

$$\boxed{a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ \ k = 2, 3, \ldots, n-1.}$$

- Збирот на првите n членови на аритметичката прогресија $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ се пресметува по формулата:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{или} \quad S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right].}$$

36. Пресметај го збирот на првите десет члена на аритметичката прогресија $1,\ 5,\ 9, ...$

37. Одреди ја сумата S_{25} за аритметичката прогресија $4,\ 1,\ -2,...$

38. Пресметај ги a_{20} и S_{20} за прогресијата $1,\ 1\frac{1}{2},\ 2,...$

39. Пресметај го збирот:

а) на првите 100 природни броеви;

б) на сите непарни природни броеви помали од 1000;

в) на природните броеви помали од 1000 и деливи со 3;

г) на природните броеви деливи со 8 и помали од 900.

40. Пресметај го n и S_n во аритметичката прогресија, ако е познато:

а) $a_1=1,\ a_n=22,\ d=3;$ б) $a_1=-28,\ a_n=28,\ d=7;$

в) $a_1=-1,\ a_n=-13,\ d=-3;$ г) $a_1,\ a_n,\ d.$

41. Одреди го d и S_n во аритметичката прогресија, ако е познато:

а) $a_1=3,\ a_n=63,\ n=16;$ б) $a_1=1,\ a_n=-26,\ n=10;$

в) $a_1=1,\ a_{17}=81;$ г) $a_1,\ a_n,\ n.$

42. Пресметај ги d и n во аритметичката прогресија, ако е дадено:

а) $a_1=4,\ a_n=104,\ S_n=1134;$ б) $a_1=2,\ a_n=87,\ S_n=801;$

в) $a_1,\ a_n,\ S_n.$

43. Одреди го a_n и S_n во аритметичката прогресија, ако е познато:

а) $a_1=7,\ d=4,\ n=13;$ б) $a_1=-8,\ d=3,\ n=20.$

44. Пресметај ги a_n и n во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_1=30,\ d=-2,\ S_n=240;$ б) $a_1=50,\ d=-7,\ S_n=-1545.$

45. Пресметај ги a_n и d во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_1=10,\ n=14,\ S_n=1050;$ б) $a_1=-20,\ S_{14}=-462.$

46. Пресметај ги a_1 и S_n во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_n = 149,\ d = 7,\ n = 22;$ б) $a_{40} = -22,\ d = -2;$

в) $a_{13} = 9,\ d = \frac{1}{3};$ г) $a_9 = 10a + 8b,\ d = a + b.$

47. Одреди ги a_1 и n во аритметичката прогресија, ако е дадено:

а) $a_n = 10,\ d = 2,\ S_n = 18;$ б) $a_n = -13,\ d = -8,\ S_n = -4.$

48. Пресметај ги a_1 и d во аритметичката прогресија, ако е дадено:

а) $a_n = 21,\ n = 7,\ S_n = 105;$ б) $a_{33} = -143,\ S_{33} = -2079.$

49. Одреди ги a_1 и a_n во аритметичката прогресија, ако е дадено:

а) $d = 6,\ n = 10,\ S_n = 340;$ б) $d = -10,\ S_{200} = 1000.$

50. Одреди ја аритметичката прогресија, ако:

а) $a_3 + a_7 = 28,\ S_{10} = 155;$ б) $a_2 + a_5 + a_{11} = 15,\ S_{14} = 112;$

в) $a_2 \cdot a_5 = 27,\ S_{11} = 121;$ г) $a_1 + a_3 = 6,\ S_{14} - S_5 = 135.$

51. Збирот на првите единаесет члена на една аритметичка прогресија е 22, а збирот на првите шеснаесет е 56. Одреди ја прогресијата.

52. Одреди ја аритметичката прогресија кај која збирот на првите шест членови е 0, а збирот на следните седум е 91.

53. Збирот на првите седум члена на една аритметичка прогресија е 14, а збирот на следните девет е 54. Која е таа прогресија?

54. Разликата на една аритметичка прогресија е 4. Колку изнесува првиот член, ако збирот на првите пет члена е трипати помал од збирот на следните пет члена?

55. Кај која аритметичка прогресија збирот на првите три члена изнесува 15, а нивниот производ 80?

56. Во една аритметичка прогресија од 15 члена, средниот член е 7, а производот на крајните членови е -147. Која е таа прогресија?

57. Во аритметичка прогресија со непарен број членови, првиот член е 3, средниот член е 13, а збирот на сите членови е 143. Пресметај ги n и d.

58. Во една аритметичка прогресија од четири члена производот на крајните членови е 85, а на средните 117. Која е таа прогресија?

59. Во аритметичка прогресија со непарен број членови средниот член е 11, а збирот на сите членови е 77. Одреди го бројот на членовите.

60. Збирот на првите десет члена на една аритметичка прогресија е 15. Производот од збирот на првите пет члена и збирот на последните пет члена е -100. Која е таа прогресија?

61. Бројот 18 раздели го на три дела кои образуваат аритметичка прогресија, така што квадратот на третиот дел да е за 40 поголем од производот на преостанатите делови. Кои се тие делови?

62. Во аритметичка прогресија од деветнаесет члена средниот член е $-\frac{1}{2}$, а производот од збирот на членовите пред него и збирот на членовите кои следат по него е -486. Одреди ја таа прогресија.

63. Во аритметичката прогресија $18,\ 15,\ 12, \ldots$ одреди го оној член што е еднаков на $\frac{1}{5}$ од збирот на сите претходни членови.

64. Во низата од природни броеви деливи со 5 одреди го оној кој изнесува $\frac{1}{22}$ од збирот на сите претходни членови.

65. Во аритметичка прогресија со разлика 2 и збир 28, првиот член е еднаков со бројот на членовите. Која е таа прогресија?

66. Потребно е да се ископа бунар длабок 12 m. За копање на првиот метар се плаќа a денари, а за копање на секој нареден метар по b денари повеќе. Пресметај колку ќе чини копањето на последниот метар, а колку на целиот бунар.

67. За ѕидање на фабрички оџак висок 26 m, за првиот метар се плаќа 8000 денари, а за секој нареден метар по 3000 денари повеќе. Колку чини ѕидањето на последниот метар, а колку ѕидањето на целиот оџак?

68. Извесна сума пари е поделена на повеќе лица, така што првото лице добило 80 денари, а секое наредно по 4 денари помалку. Последното лице добило 28 денари. Колку лица биле и колку изнесува сумата?

69. Тело при слободно паѓање поминува во првата секунда пат од $4{,}9$ m, а во секоја наредна секунда по $9{,}8$ m повеќе отколку во претходната. Колкав пат поминува телото при слободно паѓање во дваесет и првата секунда, а колкав за дваесет и една секунда?

70. Брзината на звукот при $0\,^0\mathrm{C}$ е $331\,\mathrm{m/s}$ и расте за секој степен за $0{,}6\,\mathrm{m/s}$.

а) Колкава е брзината на звукот на $15\,^0\mathrm{C}$?

б) На која температура таа ќе изнесува $352\,\mathrm{m/s}$?

71. Во аритметичка прогресија секој внатрешен член a_n е еднаков на аритметичката средина од членовите a_{n-k} и a_{n+k}. Докажи.

72. Ако a, b и c се три последователни члена на една аритметичка прогресија, тогаш за нив важи равенството $(2b+c)^2 = a^2 + 8bc$. Докажи.

73. Ако броевите a, b и c образуваат аритметичка прогресија, тогаш равенството $ax^2 + 2bx + c = 0$ има едно решение -1 и обратно. Докажи.

74. Дадени се три броја: $\lg 2, \lg\left(2^x - 1\right), \lg\left(2^x + 2\right)$. Одреди го x така што дадените броеви да формираат аритметичка прогресија.

75. Дадена е функцијата $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

а) Докажи дека $f(x+1) - f(x), f(x+2) - f(x+1), f(x+3) - f(x+2), \ldots$ образуваат аритметичка прогресија.

б) За која вредност на x збирот на првите пет члена е 60?

76. Реши ја равенката:

а) $4 + 7 + 10 + \ldots + x = 209$; б) $(x+2) + (x+5) + (x+8) + \ldots + (x+32) = 242$;

в) $(x-1) + (x-4) + (x-7) + \ldots + (x-19) = 0$; г) $25^{2+4+6+\ldots+2x} = 0{,}04^{-12}$.

77. Колку членови треба да се интерполираат меѓу 3 и 18 за збирот на аритметичката прогресија (заедно со дадените членови) да е 42?

78. Меѓу броевите 5 и 12 треба да се интерполираат одреден број членови на аритметичката прогресија така што збирот на интерполираната прогресија (исклучувајќи ги 5 и 12) да е 51. Колку членови треба да се интерполираат и колкава е разликата на новата прогресија?

79. Меѓу 5 и 26 интерполирај r членови на аритметичка прогресија така што збирот на сите членови (вклучувајќи ги 5 и 26) да биде 124.

80. Колку членови на една аритметичка прогресија треба да се интерполираат меѓу 1 и 21, така што збирот на сите членови да се однесува спрема збирот на интерполираните како $11:9$?

4 ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Треба да знаеш

- За низата (a_n) велиме дека е ***геометриска низа*** или ***геометриска прогресија*** ако количникот од секој нејзин член и неговиот претходник почнувајќи од вториот член е константен, т.е. $a_{n+1} : a_n = q$, за секој $n \in \mathbb{N}$, при што $a_1 \neq 0, q \neq 0$.

- n - от член на геометриската прогресија се одредува со формулата
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

81. Како монотоноста на геометриската низа зависи од знакот на количникот q?

82. Определи дали геометриската прогресија $a_1, a_2, ..., a_n$, расте или опаѓа, ако:

а) $a_1 > 0$ и $q > 1$; б) $a_1 < 0$ и $0 < q < 1$;

в) $a_1 > 0$ и $0 < q < 1$; г) $a_1 < 0$ и $q > 1$.

83. Одреди која од следниве низи е геометриска прогресија:

а) $5,\ 15,\ 45,\ 135, ...$; б) $-8, -4, -1, -\frac{1}{2}, ...$;

в) $-3,\ 2,\ -\frac{4}{3},\ \frac{8}{9}, ...$; г) $\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}, ...$

Напиши неколку членови на геометриската прогресија, ако: (84-87)

84. а) $a_1 = 3,\ q = 3$; б) $a_1 = -2,\ q = \frac{1}{2}$;

в) $a_1 = \frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{2}$; г) $a_1 = \frac{1}{3},\ q = -3$.

85. а) $a_1 = 4,\ a_2 = 12$; б) $a_1 = 5,\ a_2 = \frac{10}{3}$;

в) $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = -1$; г) $a_1 = -4,\ a_2 = -4$.

86. а) $a_2=\frac{1}{5},\ q=\frac{1}{5}$; б) $a_2=-2,\ q=2$;

в) $a_2=-1,\ q=-\frac{1}{3}$; г) $a_2=1,\ q=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

87. а) $a_1=5,\ a_4=135$; б) $a_1=-2,\ a_5=-\frac{1}{8}$;

в) $a_1=-2,\ a_6=64$; г) $a_1=3,\ a_3=\frac{1}{3}$.

88. Пресметај го a_n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_1=\frac{3}{4},\ q=2,\ n=7$; б) $a_1=4,\ q=-2,\ n=9$;

в) $a_1=8192,\ q=\frac{1}{2},\ n=14$.

89. Пресметај го непосредно дванаесеттиот член на геометриската прогресија $3{,}9;\ 7{,}8;\ 15{,}6;\ ...$ и добиениот резултат провери го со постепено испишување на членовите на низата.

90. Пресметај ги a_1 и q во геометриската прогресија, ако:

а) $a_5=162,\ a_6=486$; б) $a_3=8,\ a_9=\frac{1}{8}$;

в) $a_2=\frac{3}{2},\ a_6=\frac{3}{32}$; г) $a_8=\frac{27}{4},\ a_3=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

91. Одреди ја геометриската прогресија чии членови ги задоволуваат условите:

а) $a_7+a_5=160,\ a_6+a_4=-80$; б) $a_1+a_2+a_3=26,\ a_1\cdot a_3=36$;

в) $a_3-a_1=12,\ a_1\cdot a_3=64$; г) $a_1+a_2-a_3=\frac{29}{5},\ a_1\cdot a_3=1$.

92. Пресметај го a_6 во геометриската прогресија, ако:

а) $a_5-a_2=78,\ a_1+a_2+a_3=13$; б) $a_1+a_7=-325,\ a_5-a_3+a_1=-65$.

93. Збирот на првиот и третиот член на една геометриска прогресија изнесува 15, а збирот на вториот и четвртиот е 30. Која е таа прогресија?

94. Кај која геометриска прогресија збирот на првите три члена е 6, а збирот на вториот, третиот и четвртиот е -3?

95. Разликата на третиот и првиот член на една геометриска прогресија е 24, а разликата меѓу петтиот и првиот е 624. Пресметај ги a_1 и q.

96. Четири броеви формираат геометриска прогресија. Одреди ги тие броеви, ако првиот е поголем од вториот за 36, а третиот е поголем од четвртиот за 4.

97. Збирот на три члена на една геометриска прогресија е 21, а збирот на нивните квадрати е 189. Одреди ја таа прогресија.

98. Збирот на три члена на една геометриска прогресија е 26, а збирот на нивните квадрати е 364. Која е таа прогресија?

99. Одреди геометриска прогресија чии членови ги задоволуваат условите:

а) $a_2 + a_5 - a_4 = 7\frac{1}{2}, \;\; a_3 + a_6 - a_5 = 15;$

б) $a_1 + a_2 + a_3 = 39, \;\; a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729.$

100. Страните на еден триаголник со периметар 152 cm образуваат геометриска прогресија, а разликата меѓу најголемата и најмалата страна е 40 cm. Одреди ги страните на триаголникот.

101. Димензиите на еден правоаголен паралелопипед образуваат геометриска прогресија. Волуменот на паралелопипедот е $216\,\mathrm{m}^3$, а дијагоналата $\sqrt{364}\,\mathrm{m}$. Одреди ги димензиите на паралелопипедот.

102. Од буре со 100 литри вино вадиме 1 литар, а додаваме 1 литар вода. Потоа од бурето пак вадиме 1 литар и додаваме нов еден литар вода итн. Колку пати треба да се повтори постапката за да останат во бурето 50 литри вино?

103. Основните рабови и висината на една пирамида чија основа е правоаголник и подножјето на висината се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на основата, образуваат геометриска прогресија. Волуменот на пирамидата е $576\,\mathrm{cm}^3$, а плоштината на дијагоналниот пресек е $120\,\mathrm{cm}^3$. Пресметај ја плоштината на пирамидата.

104. Меѓу броевите a и b интерполирај r броеви кои со дадените образуваат геометриска прогресија.

105. Меѓу броевите a и b интерполирај r броеви, кои со дадените образуваат геометриска прогресија:

а) $a=1,\ b=32,\ r=4;$ б) $a=2,\ b=\frac{2}{243},\ r=4;$

в) $a=16, b=\frac{1}{16}, r=7;$ г) $a=1, b=\frac{x}{y}, r=6.$

106. Меѓу броевите $\frac{b^2}{a^3}$ и $\frac{a^2}{b^3}$ интерполирај 9 броеви, кои со дадените образуваат геометриска прогресија.

107. Меѓу секои два члена на геометриската прогресија $1,\ 8,\ 64,\ 512,$ интерполирај два нови члена, така што да се формира нова геометриска прогресија.

108. Меѓу секои два члена на прогресијата $1,\ a,\ a^2,\ a^3$ интерполирај по еден член за да се формира нова геометриска прогресија.

5 ЗБИР НА ПРВИТЕ n ЧЛЕНОВИ НА ГЕОМЕТРИСКАТА ПРОГРЕСИЈА

Треба да знаеш

- Ако ги разгледуваме само првите n членови од дадена геометриска прогресија (a_n), тогаш за $a_1, a_2, a_3,..., a_n$ велиме дека е ***конечна геометриска прогресија*** или геометриска прогресија со конечен број членови.
- Во геометриската прогресија со конечен број членови производот на секои два члена што се еднакво оддалечени од крајните членови е еднаков на производот од крајните членови, т.е.
$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n,\quad 2 \le k \le n.$$
- Секој член на геометриската прогресија $a_1, a_2, a_3,..., a_n$, освен крајните е геометриска средина од својот претходник и својот следбеник, т.е.
$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1},\quad k = 2,3,...,n-1.$$
- Секој внатрешен член на геометриската прогресија $a_1, a_2,..., a_n$ е геометриска средина од двата члена во низата што се еднакво оддалечени од него.
- Збирот на првите n членови на геометриската прогресија $a_1, a_2,..., a_n,...$ се пресметува по формулата
$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1},\quad q \ne 1.$$

109. Пресметај го збирот на:

а) првите десет члена на прогресијата $1,\ 2,\ 4, ...$

б) првите седум члена на прогресијата $-2,\ 4,\ -8,\ 16, ...$

в) првите единаесет члена на прогресијата $-2,\ 1,\ -\frac{1}{2}, ...$

110. Збирот на првите седум члена на една геометриска прогресија е 127, а количникот 2. Пресметај го a_6.

111. Пресметај го деветтиот член на геометриската прогресија со количник 3, ако $S_{10} = 59048$.

112. Пресметај ги n и S_n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_1 = 3,\ q = 2,\ a_n = 96$; б) $a_1 = 9,\ q = \frac{2}{3},\ a_n = \frac{32}{27}$;

в) $a_1 = \frac{3}{8},\ q = -4,\ a_n = 96$; г) $a,\ q,\ a_n;\ q > 0$ и $a_n > 0$.

113. Пресметај ги q и S_n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_1 = 3,\ a_n = 12288,\ n = 5$; б) $a_1 = 81,\ a_n = -10\frac{2}{3},\ n = 6$;

в) $a_1 = -16,\ a_{11} = -\frac{1}{64}$; г) $a_1 = \frac{1}{64},\ a_6 = -\frac{16}{243}$.

114. Пресметај ги a_n и S_n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_1 = 6,\ q = 3,\ n = 8$; б) $a_1 = 5,\ q = -\frac{1}{5},\ n = 6$;

в) $a_1 = \frac{1}{2},\ q = 4,\ n = 6$; г) $a_1 = \frac{3}{4},\ q = \frac{2}{3},\ n = 10$.

115. Пресметај ги a_1 и S_n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_n = 128,\ q = 2,\ n = 7$; б) $a_n = 78125,\ q = 5,\ n = 8$;

в) $a_5 = \frac{2}{27},\ q = -\frac{2}{3}$; г) $a_6 = -243,\ q = -\frac{3}{2}$.

116. Пресметај ги a_n и n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_1 = 7,\ q = 3,\ S_n = 2548$; б) $a_1 = 8,\ q = 2,\ S_n = 4088$;

в) $a_1 = 2,\ q = -3,\ S_n = -364$; г) $a_1 = 3,\ q = -2,\ S_n = 33$.

117. Пресметај ги q и n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_1 = 3,\ a_n = 96,\ S_n = 189$; б) $a_1 = 2,\ a_n = 1458,\ S_n = 2186$;

в) $a_1 = -9,\ a_n = -1125,\ S_n = -1404$; г) $a_1 = 1,\ a_n = 2401,\ S_n = 2801$.

118. Последниот член на една геометриска прогресија е 567, а претпоследниот 189. Ако збирот на сите членови е 847, колкави се a_1 и q, и колку членови има прогресијата?

119. Пресметај ги a_1 и n во геометриската прогресија, ако:

а) $a_n = -216,\ q = -6,\ S_n = -186;$ б) $a_n = 250,\ q = 5,\ S_n = 312;$

в) $a_n = 1458,\ q = 27,\ S_n = 1514;$ г) $a_n = 48,\ q = -2,\ S_n = 33.$

120. Одреди го a_1 и a_n во геометриската прогресија, ако:

а) $q = 2,\ n = 7,\ S_n = 635;$ б) $q = -2,\ n = 8,\ S_n = 85;$

в) $q = -\frac{1}{2},\ S_8 = \frac{85}{16};$ г) $q = \frac{1}{3},\ S_6 = \frac{364}{9}.$

121. Збирот на три броја кои образуваат геометриска прогресија е 35, а збирот на нивните реципрочни вредности е $\frac{7}{20}$. Одреди ги тие броеви.

122. Збирот на три броја кои образуваат геометриска прогресија е 7, а збирот на нивните квадрати е 21. Кои се тие броеви?

123. Збирот на првите четири члена на една геометриска прогресија е 45, а збирот на следните четири 720. Која е таа прогресија?

124. Збирот на првата половина членови на една геометриска прогресија со количник 2 изнесува 15, а збирот на втората половина е 240. Одреди го првиот член на прогресијата.

125. Збирот на првата половина членови на една геометриска прогресија е 93, а збирот на втората половина е 2976. Ако количникот на прогресијата е 2, одреди го нејзиниот трет член.

126. Во геометриската прогресија со непарен број членови првиот член е 3, средниот член е 24, а збирот на сите членови е 381. Одреди го бројот на членовите.

127. Во геометриската прогресија со непарен број членови првиот член е 1, средниот член е 16, а збирот на сите членови е 511. Одреди го количникот и седмиот член.

128. Во растечка геометриска прогресија, петтиот член е еднаков на количникот, а збирот на вториот и третиот член е $1\frac{1}{9}$. Одреди го првиот член и збирот на првите седум члена.

129. Во една геометриска прогресија збирот на првиот и последниот член изнесува 85, производот на тие членови изнесува 400, а збирот на сите членови е 55. Која е таа прогресија?

130. Според арапските извештаи индискиот крал Серан на пронаоѓачот на шахот *Sessa Ebn Daheru* му понудил да си одбере награда по желба. Тој побарал да му даде онолку зрна пченица, колку што би било доволно за : на првото шаховско поле да стави 1 зрно, на второто поле 2 зрна, на третото 4 зрна итн. ставајќи на секое поле два пати повеќе зрна отколку на претходното, колку пченица би добил пронаоѓачот на шахот?

131. Од една бактерија со делење се добиваат две. Делењето се врши секој час. Колку бактерии ќе се развијат за 10 часа, а колку за 24 часа, под услов делењето да не се наруши?

132. Докажи дека секој член на геометриската прогресија е геометриска средина од членовите меѓу кои се наоѓа.

133. Во геометриската прогресија кој било член a_n е геометриска средина од членовите a_{n-k} и a_{n+k}. Докажи.

134. Пресметај го производот на првите n членови на геометриската прогресија.

135. За геометриската прогресија $1, q, q^2, \dots$ одреди го збирот S_n и искористи го добиениот резултат полиномот q^n-1 да го разложиш на множители.

136. За геометриската прогресија $a^{n-1}, a^{n-2}b, a^{n-3}b^2, \dots$ пресметај го збирот S_n и со помош на добиениот резултат полиномот a^n-b^n разложи го на множители.

137. Реши ја равенката:

а) $1+3+9+27+\dots+x=121$; б) $3-6+12-24+\dots+x=129$.

138. Пресметај ја сумата: $1+2a+3a^2+4a^3+\dots+20a^{19}$.

139. Пресметај ја сумата: $a+2a^2+3a^3+\dots+(n-1)a^{n-1}+na^n$.

140. Докажи дека важи равенството: $(10^n+10^{n-1}+\dots+1)(10^{n+1}+5)+1=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$.

141. Пресметај го збирот:

а) $2+5+11+\dots+(3\cdot 2^{n-1}-1)$; б) $\frac{5}{2}+5+\frac{19}{2}+18+\dots+\frac{n+2^{n+1}}{2}$.

142. Нека S_n е збирот на првите n членови на геометриската прогресија. Докажи дека изразот $\frac{S_{n+2}-S_n}{S_n-S_{n-2}}$ зависи само од количникот q на таа прогресија.

143. Ако S_n, S_{2n}, S_{3n} се збирови на првите n, $2n$ и $3n$ членови на една геометриска прогресија, тогаш важи равенството: $\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}=\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}$. Докажи.

144. Во геометриската прогресија со парен број членови збирот на сите членови на низата е $(q+1)$ пати поголем од збирот на членовите што се наоѓаат на непарни места. Докажи.

145. Пресметај го збирот:

а) $9+99+999+...+\underbrace{999...9}_{n \text{ деветки}}$; б) $7+77+777+...+\underbrace{777...7}_{n \text{ седумки}}$.

146. Меѓу 6 и 1536 интерполирај седум члена на геометриска прогресија и одреди го збирот на интерполираните членови.

147. Меѓу 3 и 48 интерполирај геометриска прогресија така што збирот на вкупната прогресија (вклучувајќи ги 3 и 48) да изнесува 93.

148. Меѓу 8 и $\frac{1}{16}$ интерполирај геометриска прогресија таква што збирот на сите членови спрема збирот на интерполираните членови да се однесува како $85:42$.

149. Меѓу 2^n и 2^{2n} интерполирај $n-1$ членови на геометриска прогресија. Пресметај го збирот на таа прогресија вклучувајќи ги и крајните членови $\left(2^n \text{ и } 2^{2n}\right)$. За која вредност на n збирот на прогресијата ќе изнесува 120?

150. Аритметичка и геометриска прогресија имаат ист трет член кој е еднаков на 4. Производот на нивните први членови е 2, а на вторите е 6. Одреди ги прогресиите.

151. Аритметичка прогресија од 8 члена и геометриска прогресија од 4 члена почнуваат со 1 и се совпаѓаат во последниот член. Збирот на геометриската прогресија е поголем за 7 од последниот член на аритметичката прогресија. Одреди ги тие прогресии.

152. Три броеви чиј збир е 93 образуваат геометриска прогресија. Тие броеви претставуваат прв, втор и седми член на една аритметичка прогресија. Најди ги тие броеви.

153. Аритметичка и геометриска прогресија имаат ист прв член $a=8$. Одреди ја разликата на првата и количникот на втората прогресија, така што да имаат еднакви трети и еднакви четврти членови. Напиши ги првите четири члена на тие прогресии.

154. Збирот на три броја кои образуваат геометриска прогресија е 39. Ако од третиот број се одземе 9, тогаш броевите образуваат аритметичка прогресија. Напиши ги тие прогресии.

155. Три броја чиј збир е 26 образуваат геометриска прогресија. Ако средниот член се зголеми за 4, се добива аритметичка прогресија. Кои се тие броеви?

156. Четири броја образуваат аритметичка прогресија. Ако соодветно од секој ги одземеме броевите $2, 5, 6$ и 1, добиените броеви образуваат геометриска прогресија. Одреди ги тие броеви.

157. Три броја чиј збир е 26 образуваат геометриска прогресија. Ако на тие броеви им се додадат соодветно броевите 1, 6 и 3, тогаш добиените броеви образуваат аритметичка прогресија. Кои се тие броеви?

158. Четири броја образуваат геометриска прогресија. Нивните логаритми, земени за основа 3, образуваат аритметичка прогресија со разлика 1 и збир 18. Одреди ги тие броеви.

159. Првиот, третиот и седмиот член на една неконстантна аритметичка прогресија се истовремено и првите три члена на геометриска прогресија.

а) Одреди го количникот на геометриската прогресија.

б) Одреди кој член од аритметичката прогресија одговара на четвртиот член од геометриската прогресија.

в) Одреди ги првиот член и разликата на аритметичката прогресија, ако збирот на првите петнаесет члена е $S_{15} = 3$.

160. Три броја образуваат геометриска прогресија. Ако вториот член се зголеми за 8, се добива аритметичка прогресија; ако потоа последниот член на таа аритметичка прогресија се зголеми за 64, повторно се добива геометриска прогресија. Одреди ги трите спомената броеви.

161. Одреди четири броја од кои првите три образуваат геометриска прогресија, а последните три аритметичка прогресија, ако збирот на крајните членови е 80, а збирот на средните членови е 60.

6 ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА НИЗА

Треба да знаеш

- ***Околина*** на реалниот број x е секој отворен интервал (a,b) кој го содржи бројот x.
- Интервалот $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ каде што $\varepsilon > 0$, се вика ε – ***околина*** на бројот c.
- Точката a се вика ***точка на натрупување*** на низата (a_n), ако во произволна ε – околина на a има безброј членови на низата, т.е. ако важи $|a_n - a| < \varepsilon$ за бесконечно многу вредности на n.

Секоја ограничена низа има барем една точка на натрупување.

Бројот a се вика ***гранична вредност*** или ***граница*** на низата (a_n), ако за секој произволно избран број $\varepsilon > 0$ може да се определи број $n_0(\varepsilon)$, таков што за сите членови на низата (a_n), чиј индекс $n > n_0(\varepsilon)$ да важи $|a_n - a| < \varepsilon$. Тоа го запишуваме со $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a,\ n \to \infty$.

Од дефиницијата произлегува дека ако низата има гранична вредност скоро сите нејзини членови, т.е. сите оние членови почнувајќи од $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ – се наоѓаат во внатрешноста на интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а само конечен број членови (првите n_0 на број) $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ се надвор од овој интервал.

Бројот a е истовремено и точка на натрупување на низата.

162. На бројната права означи ги точките кои претставуваат членови на низата со општ член $a_n = \dfrac{n+1}{n}$.

а) Колку членови има на отсечката $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$, а колку на $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$?

б) Дали постои член во низата кој одговара на точката 1 на бројната права?

163. Да се определат точките на натрупување за следниве низи, зададени со општ член:

а) $a_n = \dfrac{1}{n}$; б) $a_n = n$; в) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$;

г) $a_n = 1 + 2(-1)^n$; д) $a_n = \dfrac{1-3n}{n}$; ѓ) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$;

е) $a_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{n}$; ж) $a_n = \cos^n n\pi$; з) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$;

ѕ) $a_n = 2n+1$; и) $a_n = n^2 - 3n + 5$; ј) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

164. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$, одредувајќи за секој $\varepsilon > 0$ природен број $n_0(\varepsilon)$ таков што $|a_n - 0| < \varepsilon$ за секој $n > n_0$ и пополни ја таблицата:

ε	1	1/9	1/100	1/1000	1/7225
$n_0(\varepsilon)$					

165. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, одредувајќи за секој $\varepsilon>0$ природен број $n_0(\varepsilon)$, таков што $|a_n-0|<\varepsilon$ за секој $n>n_0(\varepsilon)$ и пополни ја таблицата.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$n_0(\varepsilon)$					

166. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$.

167. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека:

а) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

168. Докажи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+5}=2$, а потоа одреди за кои вредности на n е исполнето неравенството $|a_n-2|<\varepsilon$ ако: а) $\varepsilon=10^{-2}$; б) $\varepsilon=10^{-4}$.

169. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$. Потоа одреди го n така што да биде исполнето неравенството:

а) $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|<0{,}001$; б) $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|<0{,}0001$.

170. За низата со општ член $a_n=\frac{n^2}{2n^2-1}$ докажи дека има гранична вредност $\frac{1}{2}$. Потоа одреди колку членови од низата се наоѓаат надвор од ε - околината на точката $\frac{1}{2}$, ако $\varepsilon=10^{-2}$.

171. Докажи дека низата со општ член $a_n=\frac{3n^2-2}{n^2+2}$ има гранична вредност 3. Колку членови од низата се наоѓаат надвор од ε - околината на точката 3, ако $\varepsilon=0{,}01$?

172. Докажи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3}{1-2n^2}=-\frac{5}{2}$, а потоа одреди го n така што да биде исполнето неравенството $\left|a_n+\frac{5}{2}\right|<0{,}001$.

173. Докажи дека низата $0,1; 0,11;...; 0,11...1;...$ има гранична вредност $a=\frac{1}{9}$, а потоа одреди за кои вредности на n важи $\left|a_n-\frac{1}{9}\right|<0,0001.$

174. Докажи дека низата $0,3; 0,33;..., 0,33...3;...$ има гранична вредност $a=\frac{1}{3}$, а потоа одреди колку членови на низата се наоѓаат надвор од ε - околината на точката $\frac{1}{3}$, ако $\varepsilon=0,001.$

175. Докажи дека низата:

а) $0,24; 0,2424; ..., 0,24...24;...$ има гранична вредност $a=\frac{24}{99}$;

б) $1,3; 1,33; ..., 1,33...3;...$ има гранична вредност $a=\frac{4}{3}$.

176. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-3}{\sqrt{n^2+1}+3}=1$, притоа користејќи ја дефиницијата за граница на низа.

177. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, каде што: а) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $a_n=2-\frac{1}{3^n}$; в) $a_n=\frac{\sin n}{n}$.

7 КОНВЕРГЕНТНИ И ДИВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Треба да знаеш

- Низата којашто има гранична вредност се вика ***конверīенīна низа***. Ако a е гранична вредност на низата (a_n), тогаш велиме дека низата ***конверīира*** кон a или се стреми кон a.
- Низата којашто нема гранична вредност се вика ***диверīенīна низа***.
- Секоја низа која е ограничена и има само една точка на натрупување е конвергентна.
- Секоја неограничена низа е дивергентна. Секоја ограничена низа која има повеќе од една точка на натрупување е дивергентна.
- Ако (a_n) е конвергентна низа, тогаш нејзината граница е еднозначно определена.
- Секоја конвергентна низа е ограничена.
- Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Ако нејзините (a_n) и (b_n) се конвергентни со иста гранична вредност a, тогаш и низата (c_n) со својството $a_n \le c_n \le b_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$ е конвергентна и има иста гранична вредност a, т.е. $\lim_{n\to\infty} c_n = a$. Оваа теорема се вика ***теорема за сендвич – низа***.

178. Конвергентната низа (a_n) има единствена гранична вредност. Докажи.

179. Докажи дека секоја конвергентна низа е ограничена.

180. Наведи пример на монотона и ограничена низа.

181. Докажи дека низата со општ член $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}$ е конвергентна и нејзината гранична вредност е еднаква на $\dfrac{3}{5}$.

Со користење на својствата (теоремите) за конвергентни низи, испитај ја природата на низата зададена со општ член $(182-187)$

182. а) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$; б) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$.

183. а) $a_n = (-1)^n$; б) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

184. а) $a_n = \dfrac{3n-1}{n}$; б) $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$.

185. а) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$; б) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

186. а) $a_n = (-1)^n \cdot n$; б) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

187. а) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$; б) $a_n = \dfrac{2n(-1)^n + 5}{n}$.

188. Дали секоја ограничена низа е конвергентна? Одговорот илустрирај го на конкретен пример.

189. Определи ја границата на низата $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ споредувајќи ја со низите (0) и $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

190. Нека $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$, $b_n = \dfrac{2n+2}{n+1}$ и $c_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. Со примена на теоремите за сендвич - низа докажи дека $\lim_{n\to\infty} cn = 2$.

8 НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ НИЗИ

Треба да знаеш

- За низата (a_n) велиме дека се стреми кон $+\infty$, ако за секој реален број $M>0$ постои природен број n_0 таков што
$$n>n_0 \Rightarrow a_n>M.$$
Пишуваме, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

- За низата (a_n) велиме дека се стреми кон $-\infty$, ако за секој реален број $M<0$ постои природен број n_0 таков што
$$n>n_0 \Rightarrow a_n<M.$$
Пишуваме, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

- За низата (a_n) велиме дека неограничено расте по апсолутна вредност ако за секој реален број $M>0$ постои природен број n_0 таков што
$$n>n_0 \Rightarrow |a_n|>M.$$
Пишуваме, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

- Низата (a_n) е нула – низа ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

- Нека (a_n) е низа таква што $a_n\neq 0$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

   1. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

   2. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$.

- Ако $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$; ако $|q|>1$, (q^n) е дивергентна;
за $q=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=1$; за $q=-1$, низата е дивергентна.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, каде што $e\approx 2,718182$.

191. Наведи пример за низа која:

а) се стреми кон $+\infty$; б) се стреми кон $-\infty$;

в) неограничено расте по апсолутна вредност.

192. Која од следниве низи со општ член: а) $a_n = -n^2$; б) $a_n = 6n$; в) $a_n = (-2)^n$; г) $a_n = n^3$; д) $a_n = (-1)^n n$; ѓ) $a_n = 3^n$ се стреми кон $+\infty$ или $-\infty$, а која осцилира?

193. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа, докажи дека низата $\left(\dfrac{1}{3n}\right)$ е нула – низа.

194. Докажи дека низата: а) $\left(2^{-n}\right)$; б) $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$; в) $\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)$; г) $\left(\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\right)$ е нула – низа.

195. За низата (a_n), каде што $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, $n = 1,2,3,....$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Докажи.

196. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

197. Нека (α_n) и (β_n) се нула – низи. Докажи дека и низата: а) $(c\alpha_n)$; б) $(\alpha_n\beta_n)$; в) $(\alpha_n + \beta_n)$ е нула – низа.

Пресметај ја граничната вредност на низата со општ член $(198-201)$:

198. а) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; б) $a_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$; в) $a_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$; г) $a_n = \left(\dfrac{8}{7}\right)^n$.

199. а) $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; б) $a_n = \dfrac{2\left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 3}{2\left(\dfrac{7}{8}\right)^n - 3}$; в) $a_n = \dfrac{2^{n+1}-4}{2^n+1}$; г) $a_n = \dfrac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$.

200. а) $a_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$; б) $a_n = \dfrac{3^n + 3^{-n}}{3^n - 3^{-n}}$;

в) $a_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$; г) $a_n = \dfrac{3^{n+1} + 5^{n+2}}{3^n + 5^{n+1}}$.

201. а) $a_n = \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$; б) $a_n = \dfrac{5^{n+1} + 7^{n+3}}{5^n + 7^{n+2}}$.

202. Одреди ги следните граници:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}}{1-25^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{49} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{7^{n-1}}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}, |a|,|b|<1$.

203. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{4^n}}, \quad |a|<1.$

204. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-2}$.

205. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}$.

206. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{n}$.

207. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{2n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}$.

208. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+5}\right)^{n}$.

9 ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Треба да знаеш

Ако (a_n) и (b_n) се конвергентни низи, при што $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=b$, тогаш е конвергентна секоја од низите: $(a_n)+(b_n)$, $(a_n)-(b_n)$, $(a_n)\cdot(b_n)$ и $\dfrac{(a_n)}{(b_n)}$, $b_n\neq 0$, $b\neq 0$. Притоа важи: а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Специјално, ако $a_n=c$, c е константа, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}c\,b_n=c\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c\cdot b$.

Ако $a_n=b_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^2=a^2$.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$. Специјално, ако $a_n=c$, c е константа, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{b_n}=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{c}{b}$.

209. Користејќи ги теоремите за конвергентни низи, пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+5)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2-5a_n+3)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n\cdot b_n)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$;

ѓ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2+a_n-1}{3a_n+2}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$.

Пресметај ги граничните вредности на низите дадени со својот општ член $(210-218)$:

210. а) $1+\frac{1}{n}$; б) $\frac{2n+3}{n+5}$; в) $\frac{3n-2}{2n-1}$; г) $\frac{3n}{1-n}$; д) $\frac{5}{1-\frac{1}{n}}$; ѓ) $\frac{an+b}{cn+d}$.

211. а) $\frac{(n-1)(n+3)}{n^2+2}$; б) $\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$; в) $\frac{3-n-n^2}{5n^2+6n-2}$.

212. а) $\frac{2n}{n-1}+\frac{n}{n+3}$; б) $\frac{5n-2}{n+4}-\frac{2}{n^2}$; в) $\frac{2n}{n+1}+\frac{n-3}{n}$.

213. а) $\left(\frac{1}{2n}+\frac{2n}{3n+1}\right)$; б) $\frac{2n}{n+5}-\frac{1}{5^n}$; в) $\frac{2^n}{2^n+2}$;

г) $\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$; д) $\frac{1}{5^n}-\frac{3n^2+1}{2n^2+1}$.

214. а) $\frac{2n+5}{n^2+2n-1}$; б) $\frac{3n^2+4n}{2n-1}$; в) $\frac{n^3-2n+1}{n^4+2n^2-3}$; г) $\frac{2n^5-4n^2}{3n^7+n^3-10}$.

215. а) $\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$; б) $\left(5+\frac{2}{n^2}\right)\left(2-\frac{1}{3^n}\right)$;

в) $\frac{(2n-3)(5n+1)}{n(2n-1)}$; г) $\frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^3+\frac{1}{2}n^2+0{,}5n+1}$.

216. а) $\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$; б) $\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$; в) $\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4$.

217. а) $\dfrac{2n^2}{2n+3}+\dfrac{1-3n^2}{3n^2+1}$; б) $\dfrac{3n^2}{2n+1}+\dfrac{1-6n^3}{1+4n^2}$; в) $\dfrac{n(n+2)}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}$.

218. а) $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; б) $\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$; в) $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

Пресметај ги следниве граници $(219-227)$:

219. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+...+2n}{n(10n+1)}$;

220. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+...+\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{1+3+5+...+(2n-1)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+...+2n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+...+b_{k-1}n+b_k},(a_0,b_0\neq 0)$.

221. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+7+...+(3n-2)}{3n+1}-\dfrac{n}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+5+9+...+(4n-3)}{2(n+1)}-n\right)$.

222. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2n+5}-\dfrac{5n+2}{10}\right)$.

223. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_3 3+\log_3 9+...+\log_3 3^n}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}}$.

224. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot...\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

225. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+...+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$.

226. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{125}+...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$.

227. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+...+\dfrac{1}{3^n}}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}}$.

Пресметај ги следниве граници $(228-231)$:

228. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+10}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

229. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{n}$.

230. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+2}\right)^{n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{4n+3}\right)^{3n+2}$.

231. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}$.

Пресметај $(232-239)$:

232. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+5}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-5n+6}}{3n-2}$.

233. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^5-2n+1}}{5n-4}$.

234. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-\sqrt{n^2-7}}{5n-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}+n}{\sqrt{2n^2+3n-5}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

235. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-5}}$.

236. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-5n+6}\right)$.

237. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{2n^2-5n-2}\right)$.

238. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right)$.

239. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

240. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, a е даден број, различен од нула.

241. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1$.

242. За низата: а) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \dots$; б) $\sqrt{3},\ \sqrt{3\sqrt{3}},\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ \dots$ напиши го општиот член, а потоа одреди ја нејзината гранична вредност.

243. Збирот на првите n членови на една низа е $S_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

а) Определи го општиот член a_n на низата.

б) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.   в) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

244. Збирот на првите n членови на една низа е $S_n = \dfrac{3^{n+1}-3}{2\cdot 3^n}$.

а) Определи го општиот член a_n.

б) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.   в) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

245. Збирот S_n на првите n членови на низата (a_n) е $S_n = \sqrt{n^2+n-1}$.

Одреди $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

10 ЗБИРОТ НА ЧЛЕНОВИТЕ НА БЕСКОНЕЧНА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Треба да знаеш

Нека е дадена бесконечна геометриска прогресија $a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ...;$

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$$ ќе го викаме

формален збир од членовите на бесконечната геометриска прогресија.

1. Ако $|q| < 1$, тогаш формалниот збир има конечна вредност S и таа се определува со формулата $S = \dfrac{a}{1-q}$, т.е.

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \frac{a}{1-q}.$$

2. Ако $|q| = 1$ или $|q| > 1$, тогаш формалниот збир нема конечна вредност.

246. Формирај ја низата од парцијални суми (S_n), за следнава геометриска прогресија.

а) $1+2+2^2+2^3+...;$ б) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...;$

в) $1+10^{-1}+10^{-2}+...;$ г) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+....$

Пресметај го збирот $(247-252)$:

247. а) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}+...;$ б) $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}+...+(-1)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n;$

в) $x+x^2+x^3+...+x^n+...$, за $|x|<1$; г) $1-x+x^2-x^3+...$, за $|x|<1$;

д) $1+2x+4x^2+8x^3+...$, за $|x|<\dfrac{1}{2}$;

248. а) $1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^3}{a^3}+...$, за $|b|<|a|$; б) $\dfrac{a}{b}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+\left(\dfrac{a}{b}\right)^5-\left(\dfrac{a}{b}\right)^7+...$, за $|a|<|b|$;

в) $\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{x}{b^4}+\dfrac{x^2}{a^2b^6}-...$, за $|x|<a^2b^2$; г) $1-\dfrac{a-b}{a+b}+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+...$, за $a>0,\ b>0$.

249. а) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}+...$; б) $\sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}+...$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+...$; г) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-....$

250. а) $1+\sqrt{\dfrac{1}{a+1}}+\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a+1}\sqrt{\dfrac{1}{a+1}}+...,\ a>0$;

б) $1+\sqrt{\dfrac{a+1}{a+2}}+\dfrac{a+1}{a+2}+\dfrac{a+1}{a+2}\sqrt{\dfrac{a+1}{a+2}}+...,\ a>-1$.

251. а) $1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+...,\ (\alpha\neq k\pi,\ k=0,\pm1,...)$;

б) $1-\sin\alpha+\sin^2\alpha-...,\ \left(\alpha\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k=0,\pm1,...\right)$;

в) $1+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+...\left(|\alpha|<\dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $1-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha-...\left(|\alpha|<\dfrac{\pi}{4}\right)$.

252. а) $\lg 2+\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt[4]{2}+...$; б) $\lg 3-\lg\sqrt{3}+\lg\sqrt[4]{3}-\lg\sqrt[8]{3}...$;

в) $\lg 5+\lg\sqrt[3]{5}+\lg\sqrt[9]{5}+....$

253. Реши ја равенката:

а) $\log_9 x+\log^2{}_9 x+\log^3{}_9 x+...=1,\ x<9$;

б) $\log_8 x+\log^2{}_8 x+\log^3{}_8 x+...=0{,}5,\ x<8$;

в) $1+\log_2\cos x+\log^2{}_2\cos x+...=0{,}6$.

254. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7....}}}$; б) $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}}}}$; в) $\sqrt{5\sqrt[3]{2\sqrt{5\sqrt[3]{2...}}}}$.

255. Реши ја равенката: а) $\sqrt[x]{2}\cdot\sqrt[2x]{2}\cdot\sqrt[4x]{2}...=4$; б) $\sqrt[x]{7}\cdot\sqrt[3x]{49}\cdot\sqrt[9x]{7}\cdot\sqrt[27x]{49}...=7\sqrt{7}$.